

## AST409

### Lista de exercícios – 3

1. Mostre que a razão entre a medida de rotação ( $R_m$ ) e a medida de dispersão ( $D_m$ ) é proporcional ao campo magnético paralelo à linha de visada,  $B_{\parallel}$ . Calcule a expressão de proporcionalidade.
2. Considere uma região do MI ionizada com dimensão de 10pc e um campo magnético paralelo à linha de visada de 1  $\mu$ G. Calcule a diferença de rotação induzida no ângulo de polarização de uma radiação linearmente polarizada nos seguintes casos: (a) bandas V e I; (b) bandas V e K; (c) 30 e 70 GHz; (d) 100 e 857 GHz. Os casos c e d correspondem a bandas do Satélite Planck. Calcule também a rotação se  $B = 1$  mG.
3. Calcule a velocidade de grupo a partir do índice de refração de um meio formado por elétrons livres. Demonstre a eq. 3.62 do Spitzer a partir da expressão da velocidade de grupo.
4. Considere os quatro primeiros níveis de energia do átomo de hidrogênio. Calcule a razão da populações de cada nível com relação ao fundamental para temperaturas cinéticas de 80, 1000, 10.000 e 100.000 K. Considere equilíbrio termodinâmico. Com base nos seus resultados responda quando é correto considerar que os átomos de todas as fases do MI encontram-se no nível fundamental.
5. Demonstre as relações entre os coeficientes de Einstein (3.31, 3.32 e 3.33) do livro do Maciel considerando equilíbrio termodinâmico.
6. Mostre que a equação 1 do bloco 4 (pag. 4-18) das anotações da aula sobre as bases teóricas dos processos radiativos em linhas é solução da equação de transporte radiativo.
7. Demonstre a expressão para a seção de choque de absorção integrada apresentada em aula (eq. 2 do bloco 4, pag. 4-24).
8. (Maciel, Ex. 3.2) Mostre que o perfil Doppler é normalizado.
9. (Maciel, Ex. 3.3) Mostre que o perfil de Lorentz é normalizado e que sua largura total a meia altura (*Full width at half maximum, FWHM*) é  $\Gamma_k/2\pi$ .
10. Pesquise o valor da constante de amortecimento para a linha K do CaII e considere  $T = 80$  K. (a) Faça um gráfico do perfil de Lorentz para essa linha. (b) Faça um gráfico do alargamento Doppler devido ao movimento das partículas descrito pela distribuição de Maxwell. (c) Calcule em qual largura os dois perfis coincidem. (d) Faça também um gráfico do perfil de Voigt considerando  $a \ll 1$ .
11. (a) Calcule a expressão da razão de duas linhas de recombinação da série de Balmer. (b) Calcule a expressão da razão de duas linhas de recombinação que tem o mesmo nível superior. (c) Faça os gráficos da razão das seguintes linhas como função da temperatura:  $H\alpha/H\beta$ ,  $H\beta/H\gamma$  e  $Ly\beta/H\alpha$ .
12. Demonstre a equação

$$4\pi \int_{\text{linha}} j_{\nu} d\nu = h\nu_{mn} \alpha_{mn} n_p n_e .$$

13. (Maciel, Ex. 3.4) Processos colisionais, absorção da radiação, recapturas a partir do contínuo etc. mantêm a população de um certo nível de energia  $k$  em  $10^8$  átomos. O coeficiente de emissão de Einstein relativo a um nível inferior  $j$  é  $A_{kj} \sim 10^8 \text{ s}^{-1}$ . (a) Qual é o número de emissões espontâneas por segundo para o nível  $j$ ? (b) Qual é tempo de vida radiativo do nível  $k$  em relação às emissões para o nível  $j$ ?

14. (Maciel, Ex. 3.5) Calcule as forças de oscilador  $f_{jk}$  e  $f_{kj}$  para a linha de 21 cm do hidrogênio neutro, para a qual o coeficiente de emissão é  $A_{kj} \sim 2,9 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ .
15. (Maciel, Ex. 4.2) A linha Lyman- $\alpha$  do H envolve uma transição entre dois níveis  $j$  e  $k$ , cujos parâmetros são:  $l_{jk} = 1215,67 \text{ \AA}$ ,  $g_j = 2$ ,  $g_k = 6$ ,  $A_{kj} = 6,265 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$ . (a) Calcule a força de oscilador  $f_{jk}$  para esta linha. (b) Calcule a constante de dissipação  $G_k$ . (c) Calcule a largura Doppler  $D_n$ , admitindo uma temperatura cinética  $T = 80 \text{ K}$  para a nuvem de H. (d) Considere uma região nas asas radiativas da linha, onde  $D_n \sim 10 D_n$ . Mostre que, neste caso,  $(D_n)^2 \gg (G_k/4p)^2$  (e) Estime a profundidade óptica nas asas da linha, se a densidade de coluna do H for  $N_H = 3 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-2}$ . Que fração da intensidade original é absorvida nesta região? Admita que todo o H está no estado fundamental. (f) Calcule a profundidade óptica no centro da linha. (g) Calcule a FWHM. (h) Em que região a linha torna-se suficientemente fraca para que  $t \sim 1$ ?
16. (Maciel, Ex. 4.3) Mostre que (4.52) reduz-se a (4.47) quando  $t_n \gg 1$ .
17. (Maciel, Ex. 4.4) Uma linha espectral de comprimento de onda central  $l$  é formada em uma região caracterizada por uma temperatura cinética  $T$  e uma velocidade de microturbulência  $v_t$ . (a) Admitindo que o processo de alargamento da linha seja Doppler, como poderia ser escrita a largura Doppler dessa linha? (b) Considerando a linha do Si III com  $l = 1206 \text{ \AA}$  em uma nuvem com  $T = 80 \text{ K}$ , que valor deve ter a velocidade de turbulência para que a largura Doppler aumente por um fator 2?
18. (Maciel, Ex. 4.5) Medidas de largura equivalente das linhas D do Na I em  $l = 5890 \text{ \AA}$  em absorção na direção da estrela HD190066 (B1I) produzem o resultado  $W \sim 400 \text{ m\AA}$ . (a) Suponha que a linha é fraca e calcule a densidade de coluna dos átomos de Na neutro na direção da estrela. Mostre que, neste caso, é válida a relação

$$N \sim 11,3 W / (l f)$$

onde  $N$  está em  $\text{cm}^{-2}$ ,  $W$  em  $\text{m\AA}$  e  $l$  em  $\text{cm}$ . Use  $f = 0,65$ . (b) Uma análise da saturação da linha sugere um fator de correção da ordem de 6 para a densidade de coluna. Aplique esse fator ao resultado (a) e estime a densidade de coluna total de Na, considerando que 99% dos átomos de sódio estão ionizados.

19. Demonstre a eq. 3 do bloco 6.
20. Demonstre (usando a definição de largura equivalente) a equação 1 do bloco 6 com as anotações de aula sobre linhas de absorção. Use a solução da equação de transporte radiativo, desprezando o termo de emissão, para mostrar que a eq. 2 é válida. Qual as expressões para largura equivalente em frequência e em comprimento de onda?
21. Demonstre a eq. 4 das anotações de aula do bloco 6
22. (a) Calcule a largura natural da linha de 21 cm e compare com a largura Doppler em regiões do MI com temperaturas de 100 e 20 K. (b) Qual é a separação das componentes Zeeman para um campo magnético de 1 mG. Como ele se compara as larguras que você encontrou no item anterior. Esse efeito pode ser medido?