

AST203

Lista - Estatística + Sinais

1. Calcule a função de distribuição (= distribuição cumulativa de probabilidade) das seguintes densidades de probabilidade:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Faça os gráficos das funções de densidade de probabilidade e de distribuição de cada item.

2. Considere duas grandezas estatisticamente independentes x_1 e x_2 , das quais possuímos uma estimativa do valor médio e da variância. Calcule o valor médio e a variância da grandeza f que é uma função de x_1 e x_2 , isto é, $f(x_1, x_2)$, nos seguintes casos:

a) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

b) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$

c) $f(x_1, x_2) = a x_1$, onde a é uma constante

d) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Você pode usar a expressão para propagação de erros.

3. (Brandt, Exemplo 6-1) Uma quantidade (por exemplo, o comprimento de um objeto) foi medida 7 vezes obtendo-se os seguintes resultados:

10,5 10,9 9,2 9,8 9,0 10,4 10,7

- a) Calcule a média e a variância. Você pode usar qualquer aplicativo, programa, etc. Mas, apresente a expressão utilizada.

4. Faça um gráfico com as distribuições de Poisson e Gaussiana considerando o mesmo valor N para a taxa de eventos no caso de Poisson e para a média e variância para Gaussiana para os seguintes casos:

a) $N = 1$;

b) $N = 5$;

c) $N = 10$;

d) $N = 100$.

Como você compara a Gaussiana e a distribuição de Poisson em cada caso?

5. Suponha que você esteja interessado em descobrir possíveis sinais periódicos no fluxo de um sistema binário. Para isso você realizou uma série temporal de medidas de magnitude. Você realizou medidas com tempo de exposição de 20s durante 6h consecutivas. Qual é a frequência de Nyquist da sua série? Qual é a máxima frequência que você pode detectar com segurança a partir dos seus dados? Supondo que você encontre um sinal com frequência abaixo desse valor máximo, qual é a incerteza no valor desse frequência?
6. Vamos considerar um medida, realizada por um detetor unidimensional, cuja única fonte de ruído é o céu. Na configuração em que o telescópio aponta para a fonte, a medida é igual a 1000 contagens para um dado tempo de integração, t_1 . Quando o telescópio é deslocado para uma posição onde não existe fonte, as contagens no mesmo tempo de integração são 100. Responda:
- a) qual a taxa de contagens por segundo do céu (N_C)?
 - b) qual a taxa de contagens por segundo da fonte (N_F)?
 - c) qual o sinal da fonte no tempo de integração t_1 ?
 - d) qual a razão sinal/ruído, S/N , da medida da fonte integrada em t_1 segundos, considerando a estatística de Poisson?
 - e) Escreva a razão sinal-ruído (S/N) como função de um tempo de integração qualquer, t , N_C e N_F .
7. Considerando que o fundo de céu no filtro V , m_V , é da ordem de 22 mag arcsec⁻², que cada pixel de um CCD corresponde a uma área de 2×2 arcsec² no céu e que o telescópio possui um diâmetro de 3,6m e transmite 100% da luz, qual o número de fótons do fundo de céu incidentes em cada pixel por segundo? Qual a magnitude limite (por segundo de arco ao quadrado) de uma galáxia que possa ser detectada contra o fundo do céu em uma integração de 30 minutos? Qual seria a magnitude limite se a galáxia fosse observada por 10 horas? Considere como limite de detecção uma $S/N = 3$ em um pixel do detetor.
8. No infravermelho médio, o fluxo do ruído de fundo tende a ser muito maior que o fluxo da fonte. Nesse caso, podemos mostrar que (consultar: *Electronic Imaging in Astronomy*, I. McLean):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_2 = \frac{f_2}{f_1} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \left(\frac{S}{N}\right)_1'$$

onde: f_i é o fluxo da fonte i que é observada no tempo t_i e a razão sinal-ruído dessa observação é $(S/N)_i$.

(a) Demonstre a relação acima.

(b) Vamos, agora, planejar uma observação nessa região espectral. Desejamos uma observação com sinal-ruído de 10 de dois objetos: um com fluxo igual a 0,1 Jy e outro com fluxo igual a 0.1 mJy em 18,2 I m. Qual o tempo de integração necessário em cada fonte? O instrumento fornece uma razão sinal-ruído de 5 para um tempo de integração na fonte de 30 min para uma fonte de fluxo igual a 10 mJy.