

MARTINS, Roberto de Andrade. A busca da ciência *a priori* no final do século XVIII e a origem da análise dimensional. In: MARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C., P.; SILVA, C. C.; FERREIRA, J. M. H. (eds.). *Filosofia e história da ciência no Cone Sul: 3º Encontro*. Campinas: AFHIC, 2004. Pp. 391-402. (ISBN 85-904198-1-9)

A BUSCA DA CIÊNCIA *A PRIORI* NO FINAL DO SÉCULO XVIII E A ORIGEM DA ANÁLISE DIMENSIONAL

Roberto de Andrade Martins *

Resumo – A análise dimensional é uma técnica de obtenção de equações que representam leis científicas a partir de considerações sobre a dimensionalidade das grandezas envolvidas. Esse método teve forte desenvolvimento na física durante a segunda metade do século XIX e início do século XX. O mais antigo trabalho utilizando análise dimensional que foi localizado é um artigo de François Daviet de Foncenex, publicado em 1761, no qual o autor tentava estabelecer a priori as leis fundamentais da Mecânica. O trabalho de Foncenex teve boa repercussão, gerando duas linhas de pesquisa que serão expostas e discutidas neste trabalho. Uma delas seguiu diretamente o trabalho de Foncenex, aplicando argumentos dimensionais à mecânica (especialmente na tentativa de provar a priori a lei da composição das forças). Nesta seqüência se insere o trabalho de Poisson. A outra linha introduziu o uso de argumentos dimensionais na geometria, para tentar provar o postulado euclidiano das paralelas. Esse tipo de abordagem foi iniciado por Adrien-Marie Legendre, em 1794. O presente estudo, além de descrever esses episódios, faz um exame detalhado dos conceitos subjacentes a esse método, no período inicial de desenvolvimento da análise dimensional.

INTRODUÇÃO

A *análise dimensional* é uma técnica que permite obter equações que representam leis científicas, a partir de considerações sobre a dimensionalidade das grandezas físicas – ou seja, sem ser necessário dispor de uma *teoria*, propriamente dita, sobre o assunto, nem dispor de informações obtidas empiricamente. Um exemplo simples pode ilustrar essa técnica. Suponhamos que queremos obter uma

* Grupo de História e Teoria da Ciência, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Brasil. E-mail: Rmartins@ifi.unicamp.br

fórmula para o período T de um pêndulo simples. É preciso, inicialmente, fazer algumas hipóteses sobre as grandezas que podem influenciar esse período. Suponhamos que T pode depender da massa M do corpo que está oscilando, do comprimento L do fio do pêndulo, e da aceleração da gravidade g . A partir da análise das dimensões físicas das várias grandezas envolvidas, pode-se concluir que o período do pêndulo não deve depender da massa do corpo que oscila, e que deve ser dado por uma fórmula do tipo:

$$T = k \sqrt{\frac{L}{g}}$$

onde k é uma constante sem dimensões físicas.

O argumento é simples. As dimensões físicas das grandezas são representadas em função das dimensões fundamentais de comprimento [L], tempo [T] e massa [M]. No caso específico que estamos discutindo, temos as dimensões [T] para o período, [M] para a massa, [L] para o comprimento do pêndulo e $[L].[T]^{-2}$ para a aceleração da gravidade. Como existe uma única grandeza na qual aparece [M], a massa não pode aparecer na equação procurada. Quanto às outras grandezas, elas só podem ser combinadas de um único modo, em que as dimensões dos dois lados da equação são iguais. Portanto, a equação procurada deve ter a forma indicada.

Para se aplicar a análise dimensional, é necessário:

- 1) indicar quais as grandezas físicas que podem influenciar no fenômeno estudado;
- 2) determinar as dimensões físicas de todas essas grandezas;
- 3) procurar como essas grandezas podem ser combinadas de tal modo a satisfazer o princípio de homogeneidade dimensional das grandezas físicas.

Esse método de obtenção de equações foi muito utilizado na física, durante a segunda metade do século XIX e início do século XX. Autores como Lord Rayleigh e Albert Einstein fizeram uso dessa técnica em suas pesquisas. A análise dimensional é especialmente útil no caso de fenômenos de alta complexidade (incluindo aplicações técnicas), quando há dificuldades em desenvolver uma dedução teórica propriamente dita.

Há poucos estudos sobre a história da análise dimensional. A versão mais difundida afirma que ela surgiu a partir dos estudos sobre homogeneidade de fórmulas, realizados por Jean-Baptiste Fourier em sua obra *Théorie analytique de la chaleur*, publicada em 1822. Sabe-se que, de fato, Fourier apresentou naquele livro uma discussão sobre as dimensões das grandezas físicas. No entanto, naquele estudo, ele não utilizou considerações dimensionais para deduzir fórmulas. Este trabalho mostrará como surgiu a análise dimensional – na verdade, 60 anos antes do trabalho de Fourier – e discutirá alguns aspectos de seu desenvolvimento inicial, especialmente no caso do seu uso na mecânica e na tentativa de provar o postulado das paralelas, da geometria euclidiana.

O ARTIGO DE DAVIET DE FONCENEX

O mais antigo trabalho utilizando análise dimensional que foi localizado é um artigo assinado por François Daviet de Foncenex (1734-1799), publicado em 1761 na revista da Academia de Ciências de Turim (FONCENEX, 1761). Nesse artigo, o autor tentava estabelecer *a priori* as leis fundamentais da mecânica.

Esse artigo teve uma certa repercussão positiva na época. Talvez por se tratar de um autor desconhecido, que era discípulo de Lagrange, diversos autores atribuíram as idéias do artigo (senão todo seu conteúdo) ao próprio Lagrange.

Seguindo o exemplo de autores anteriores, que haviam tentando estabelecer a mecânica a partir de

considerações gerais – especialmente d’Alembert – Foncenex tentou provar a lei da inércia, a lei da composição das forças e a lei do equilíbrio das alavancas. Nesses dois últimos casos, ele utilizou argumentos dimensionais.

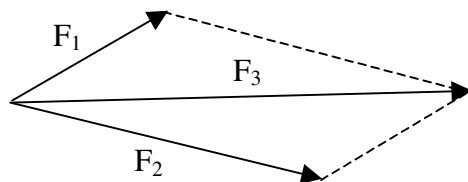


Figura 1. A lei de composição das forças afirma que o efeito produzido por duas forças não paralelas, F_1 e F_2 , aplicadas a um mesmo ponto, é equivalente ao efeito de uma única força F_3 , cuja direção e módulo são dados pela diagonal do paralelogramo formado a partir de F_1 e F_2 .

A lei de composição de forças (ou “regra do paralelogramo”) é muito antiga. Ela aparece na mecânica do pseudo-Aristóteles, e foi muito utilizada nos séculos XVI e XVII (ver CROWE, 1967, pp. 2, 13-14). Ela se tornou especialmente importante a partir de 1687, quando Pierre Varignon, Bernard Lamy e Isaac Newton (independentemente) tentaram justificar essa lei e aplicaram-na a diversos problemas mecânicos. No caso específico de Newton, essa lei seria um corolário das três leis do movimento, e não um princípio independente. Autores posteriores consideraram a análise de Newton insatisfatória. Jean d’Alembert, na primeira edição do seu *Traité de dynamique* (em 1743) argumentou que todas as leis básicas da mecânica podiam ser provadas a partir de “princípios necessariamente verdadeiros e evidentes” (D’ALEMBERT, 1743, p. i).

A partir de todas essas reflexões, segue-se que as leis conhecidas da estática e da mecânica são as que resultam da existência da matéria e do movimento. Mas a experiência prova que essas leis são realmente observadas nos corpos à nossa volta. Portanto, as leis do equilíbrio e do movimento, tais como as que a observação nos informa, são verdades necessárias. (D’ALEMBERT, 1743, pp. 397)

É dentro desse contexto que, em 1761 aparece o artigo de Foncenex. Os objetivos do autor eram iguais aos de d’Alembert:

- Provar as leis da inércia, da composição das forças e do equilíbrio;
- Responder à pergunta: as leis da mecânica são verdades necessárias ou contingentes?

Foncenex cita d’Alembert várias vezes, em seu trabalho, não tentando ocultar a influência recebida daquele autor. Ele defende a idéia de que a mecânica é uma parte da matemática e, portanto, tem leis tão evidentes quanto as da geometria; e essas leis não podem ser violadas. Lembremo-nos que, no século XVIII – antes portanto do aparecimento das geometrias não-euclidianas – era consenso que a geometria era *verdadeira*, e que suas bases eram *evidentes* – exceto pela pequena nuvem negra representada pelo quinto postulado de Euclides.

Para provar a lei de composição das forças, Foncenex primeiramente prova um *lemma* correspondente a uma situação mais simples: duas forças de igual intensidade aplicadas ao mesmo corpo possuem uma resultante que é proporcional às suas intensidades e a uma função do ângulo entre elas.

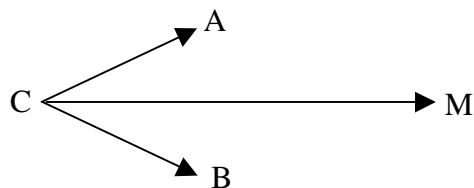


Figura 2. As forças representadas por CA e CB possuem igual intensidade. Foncenex procura provar que a resultante CM deve ser proporcional a essa intensidade e a uma função do ângulo entre elas.

A hipótese inicial é que a intensidade z da resultante só pode depender da intensidade a das duas forças e do valor do ângulo ϕ entre elas. Portanto,

$$z = \text{funct}(a, \phi)$$

Resta determinar qual é a forma dessa relação. Foncenex apresenta então o seguinte argumento:

Mas como a força CM é da mesma natureza que a [força] CA, é necessário que elas contenham o mesmo número de dimensões; isso leva a

$$z = CM = \text{funct.}(a, \phi) = a \cdot \text{funct.} \phi,$$

pois a dimensão de ϕ é nula. (FONCENEX, 1761, p. 306)

Foncenex não explicou o significado do conceito de “dimensão” que estava utilizando, nem neste ponto, nem no restante do seu trabalho. Desde a Antiguidade, “dimensão” era um conceito pertencente à geometria, para descrever entes como linhas, superfícies, volumes – que tinham, respectivamente, uma, duas e três dimensões. Como as áreas são proporcionais à segunda potência dos comprimentos, e os volumes são proporcionais à terceira potência dos comprimentos, também se passou a utilizar no século XVII o nome “dimensão” para representar potências, como em x^2 , que teria *duas dimensões*. No entanto, o conceito não era utilizado para forças e outras grandezas físicas.

Alguns poucos autores do século XVIII, como Euler, tentaram estender o conceito à física. No entanto, “dimensão” continua a ter uma conotação geométrica, e Euler chega a afirmar que as forças e linhas são grandezas homogêneas (de mesma dimensão). O uso que Foncenex faz do conceito é novo, e não pode ser interpretado a partir do conceito geométrico.

Foncenex sugeriu que o mesmo método poderia ser utilizado para provar outras coisas:

[...] poderíamos, do mesmo modo, demonstrar por este método, de um modo direto e natural, muitos teoremas acerca da proporcionalidade dos lados das figuras, e muitas outras proposições da geometria e da mecânica. (FONCENEX, 1761, p. 306)

Pelo estilo desta frase, podemos inferir que o autor não tinha conhecimento de qualquer uso anterior desse método, já que ele afirma que “poderíamos” utilizá-lo para demonstrar outros resultados [“on pourroit de même démontrer par cette méthode”]. Em outro ponto do artigo, ele comenta: “A demonstração completamente analítica que encontrei me pareceu digna de ser colocada aqui, por causa de sua singularidade”, o que reforça a idéia de que ele não conhecia nenhum tratamento semelhante anterior.

Além da análise da composição de forças, Foncenex desenvolveu argumentos muito semelhantes

para a composição de quantidades de movimento. Nesse caso, as grandezas físicas relevantes eram massa e velocidade. Em outro ponto, Foncenex utilizou a análise dimensional na demonstração da lei do equilíbrio das alavancas, onde apresenta inicialmente um novo *lemma*:

Lemma. Se duas forças equivalentes = p (como, por exemplo, dois pesos iguais) agem em direções paralelas sobre a alavanca AB nos pontos A e B a iguais distâncias do ponto fixo C . É imediatamente evidente que a alavanca estará em equilíbrio em relação ao ponto C , pois tudo é igual de um lado, e do outro: eu também digo que o ponto C suportará o mesmo esforço como se as forças $p+p$ estivessem aplicadas diretamente a C ; porque este esforço, ou a força que as equilibraria se agisse em C na direção oposta, não depende senão da quantidade p , e, se quisermos, da distância CA , que chamo de x ; esta força será portanto expressa por *fonct.* (p, x), e podemos demonstrar que isso é igual a $p \cdot \text{fonct. } x$, como no lemma do Artigo I. (FONCENEX, 1761, pp. 319-320)

É importante notar que, no caso anterior, Foncenex estava analisando uma situação em que as grandezas eram todas forças, exceto um ângulo (que não possui dimensão). No caso da alavanca, há dois tipos de grandezas que possuem dimensões: as forças e a distância CA . O argumento pressupõe que forças e distâncias possuem dimensões totalmente diferentes, o que reforça o comentário feito acima, de que Foncenex não estava utilizando o conceito puramente geométrico de dimensão.

O CONCEITO DE “DIMENSÃO” UTILIZADO POR FONCENEX

O conceito de dimensão de grandezas *físicas* (não muito claro) utilizado nesse trabalho era novo, e seu uso por Foncenex também parece novo. Mas qual era esse conceito, afinal, já que Foncenex não o explicitou?

Em situações como essa, muito comuns na história da ciência, pode-se introduzir uma *reconstrução conceitual* para procurar explicitar os pressupostos que poderiam ter norteado o pensamento do autor. No caso do artigo de Foncenex, podemos justificar todos os argumentos dimensionais apresentados a partir das seguintes premissas:

- FDF 1 – Quando duas grandezas são da mesma natureza, elas possuem o mesmo número de dimensões.¹
- FDF 2 – Os ângulos possuem dimensão nula.²
- FDF 3 – Forças, massas e velocidades possuem um número de dimensões diferente de zero.³
- FDF 4 – As dimensões da força são diferentes das dimensões do comprimento.⁴
- FDF 5 – Se z é uma função de a e b ; se z e a possuem o mesmo número de dimensões (diferentes de zero); e se b é uma grandeza de dimensão nula, ou tem dimensão diferente da de a e z ; então, devemos ter $z = a \cdot f(b)$, ou seja, z deve ser diretamente proporcional a a e a uma função de b .⁵

As premissas acima são *suficientes* para justificar os argumentos de Foncenex. Obviamente, não são *necessários* – seria possível escolher outro conjunto de premissas. Há, evidentemente, um problema metodológico na reconstrução conceitual, pois ela extrapola, necessariamente, o conteúdo

¹ “Mas sendo a força CM da mesma natureza da [força] CA , é necessário que elas contenham o mesmo número de dimensões”.

² “[...] pois a dimensão de ϕ é nula”.

³ Suposição necessária para poder aplicar os argumentos que Foncenex utilizou em várias partes do seu artigo.

⁴ Suposição necessária para justificar o argumento da alavanca.

⁵ Pressuposto que justifica os argumentos centrais utilizados por Foncenex.

do texto estudado. Em certo sentido, trata-se de apresentar proposições gerais que incluam as proposições particulares utilizadas nos argumentos do texto. Essas proposições gerais devem ser escolhidas de modo a terem estrutura e linguagem semelhante às proposições particulares, evitando-se tanto a extrapolação exagerada, quanto a introdução de pressupostos desnecessários para a justificativa dos argumentos do texto. A reconstrução conceitual apresentada acima pretende ser adequada e *natural*, no mesmo sentido em que um argumento *inválido* do tipo “ $P(a)$, portanto $Q(a)$ ” pode ser tornado válido de uma forma *natural* se adicionarmos a premissa implícita, “para todo x , se $P(x)$ então $Q(x)$ ”

Das premissas acima apresentadas, a primeira (FDF 1) pode ser considerada como aceita desde a Antigüidade, para grandezas geométricas. A segunda (FDF 2), embora se refira a um ente geométrico – o ângulo – não era tão simples, pois a natureza dos ângulos foi muito discutida, desde a Antigüidade até tempos recentes, sem se chegar a um consenso. A última (FDF 5) pode ser considerada como uma forma do princípio de homogeneidade, conhecido desde a Antigüidade. Mas a terceira e a quarta premissas são novas, pois introduzem a idéia de diferentes *tipos* de dimensões, para grandezas físicas.

DAVIET DE FONCENEX

Antes de discutir as repercussões do trabalho de Foncenex, vamos apresentar alguns dados a respeito do próprio autor.

Não se conhece muito sobre François Daviet de Foncenex (1734-1799)⁶. Sabe-se que ele nasceu em Thonon (França) e estudou na escola de artilharia de Turim, tendo sido aluno de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) antes de 1760. Lagrange, natural de Turim, era muito jovem na época, e seu aluno era dois anos mais velho do que ele. Em 1757 foi fundada a Academia de Ciências daquela cidade, por três pessoas: Lagrange, o Conde Saluzzo di Menusiglio, e Giuseppe Cigna. Nos anos de 1759 e 1760, seis novos membros foram admitidos à Academia de Turim; um deles foi Foncenex. Em 1759, a Academia de Turim publicou o primeiro volume de suas memórias, sob o nome de *Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis*. Nesse volume apareceu um artigo sobre números complexos e imaginários, assinado por Foncenex, com uma nota de Lagrange (FONCENEX, 1759). Isso mostra a existência de uma relação bastante forte entre ambos.

Os dois únicos trabalhos científicos relevantes de Foncenex são os já mencionados, de 1759 e 1761. Pouco depois da publicação do segundo trabalho, e com a ajuda de Lagrange, ele foi colocado pelo príncipe de Sardenha como comandante de sua marinha. Posteriormente, Foncenex se tornou governador de Sassari e Villefranche. Em 1789, ele publicou sua terceira e última contribuição científica: a descrição de um raio que subiu aos céus, do farol de Villefranche. Sua carreira política e militar teve percalços: em 1792 foi acusado de fraqueza ou traição, por não defender Nice, e ficou na prisão durante um ano. Em 1799 – o ano de sua morte – seu trabalho sobre os princípios da mecânica foi publicado sob forma de livro, em Turim. De acordo com Hoefler, ele deixou vários manuscritos sobre álgebra e geometria, mas nada se sabe sobre o conteúdo desses trabalhos.

O MÉTODO DIMENSIONAL NA MECÂNICA: POISSON

O artigo de Foncenex se tornou bem conhecido, no final do século XVIII. Foi citado por d’Alembert, Laplace e Fourier, que no entanto não discutiram nem utilizaram o método de análise dimensional, limitando-se a corrigir um erro analítico do trabalho (MARTINS, 1981).

A primeira obra importante sobre mecânica que utilizou o método de Foncenex foi o *Traité de*

⁶ As principais fontes de informação são os dicionários biográficos antigos: HOEFER, 1857-1866, vol. 13, p. 240; MICHAUD, 1843-1847, vol. 7, p. 321.

mécanique de Siméon Denis Poisson (1781-1840). A primeira e a segunda edições desta obra (1811 e 1833) reproduzem (com algumas modificações) o argumento de Foncenex do paralelogramo das forças – sem mencionar a fonte da demonstração, no entanto.

Há algumas diferenças relevantes no tratamento utilizado por Poisson, que na 2ª edição toma o cuidado de descrever explicitamente o princípio da homogeneidade dimensional, antes de utilizá-lo. É interessante observar que Foncenex não utilizou a palavra ‘homogeneidade’, e que Poisson a utilizou, evitando no entanto referir-se à ‘dimensão’ das grandezas mecânicas.

As equações que consideraremos conterão números abstratos, tais como o número π , logaritmos, linhas trigonométricas, etc.; elas também conterão outras quantidades de várias naturezas, que serão também representadas por números exprimindo suas razões com unidades escolhidas arbitrariamente, garantindo-se que cada unidade será a mesma para toda quantidade do mesmo tipo. Mudando a grandeza de uma ou várias unidades, os números que exprimem as quantidades correspondentes variarão inversamente como aquela grandeza e, apesar dessa mudança completamente arbitrária, as equações que as contêm devem ainda valer. É necessário, para que isso aconteça, que suas formas obedeçam a certas condições gerais, fáceis de verificar em cada caso particular, e que são chamadas, no sentido mais geral, de condições de *homogeneidade das quantidades*. Qualquer equação que não as satisfaça será errada por esta razão, e deve ser rejeitada. (POISSON, 1833, vol. 1, p. 39)

Como ficará claro mais adiante, Poisson considerava cada unidade como independente das outras, exceto no caso das unidades de comprimento, área e volume. Ele não tentou reduzir todas as grandezas a conjuntos de algumas poucas unidades fundamentais, como Fourier fez; isso retira de seu método grande parte de seu valor, e produz conseqüências que não concordam com a análise dimensional contemporânea.

Assim, representando por F uma dada função, vamos supor que temos

$$F(f, f', \dots, L, L', \dots, m, m', \dots, t, t', \dots) = 0; \quad (a)$$

sendo f, f', \dots forças, L, L', \dots linhas, m, m', \dots massas, t, t', \dots tempos. Se representamos por n, n', n'', n''' diversos números abstratos, e reduzirmos ao mesmo tempo a unidade de força na razão de um para n , a unidade linear na razão de um para n' , a unidade de massa na razão de um para n'' , a unidade de tempo na razão de um para n''' , os números $f, f', \dots, L, L', \dots, m, m', \dots, t, t', \dots$ se tornarão $nf, nf', \dots, n'L, n'L', \dots, n''m, n''m', \dots, n'''t, n'''t', \dots$, e a equação (a) deve ser ainda válida, ou seja, deve-se ainda ter

$$F(nf, nf', \dots, n'L, n'L', \dots, n''m, n''m', \dots, n'''t, n'''t', \dots) = 0,$$

sejam quais forem n, n', n'', n''' . Se a equação incluir superfícies s, s', \dots e volumes v, v', \dots , suas dimensões deverão ser relacionadas à mesma unidade das linhas L, L', \dots e essas quantidades s, s', \dots e v, v', \dots se tornarão conseqüentemente $n^2s, n^2s', \dots, n^3v, n^3v', \dots$ pela mudança desta unidade. (POISSON, 1833, vol. 1, pp. 39-40)

Aqui, Poisson se refere explicitamente à relação entre as unidades de comprimento, área e volume, e deixa de mencionar outras relações, como entre a velocidade e comprimento. Como ele diz que a equação deve ser válida **sejam quais forem n, n', n'', n'''** , isso implica que as unidades de força, comprimento, massa e tempo podem ser alteradas arbitrariamente e independentemente sem mudar a equação. Essa não é nossa concepção atual.

Para ilustrar esse princípio, Poisson apresenta inicialmente um exemplo, testando uma equação particular apresentada no seu livro que satisfaz o princípio da homogeneidade. A fórmula testada

contém apenas quantidades geométricas. Em seguida, ele propõe uma nova regra:

É impossível que a equação (a) possa conter apenas uma quantidade de algum tipo; quando ela contém duas – por exemplo, duas forças f e f' – e resolvemos [a equação] em relação a uma delas, obtendo

$$f' = F(f, L, L', \dots, m, m', \dots, t, t', \dots),$$

é necessário, pela homogeneidade das quantidades, que f seja um fator de todos os termos da nova função F , ou, dizendo de outro modo, exige-se que tenhamos:

$$f' = Nf$$

sendo N um fator que não conterá nenhuma quantidade da natureza de f e f' , e não variará com a unidade de força. (POISSON, 1833, vol. 1, p. 41)

Note-se que, se o princípio de homogeneidade de Poisson estivesse correto, então qualquer fórmula semelhante a $F = m \cdot d^2x/dt^2$ seria considerada *errada*, pois nela aparece apenas uma quantidade de cada tipo. Poisson utiliza equações como essa no seu livro, mas não discute esse problema. Na verdade, na sua obra encontramos um único uso do princípio da homogeneidade, e isso ocorre na dedução da regra do paralelogramo das forças. A dedução segue as linhas gerais do artigo de Foncenex, e provavelmente se baseou nele. Vamos reproduzir abaixo a parte relevante do argumento, para permitir uma comparação (ver figura 3).

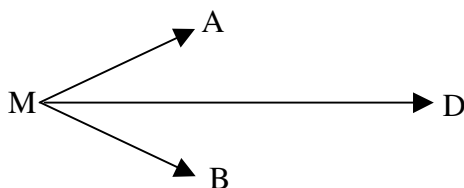


Figura 3. A força MD é a resultante das forças MA e MB, na dedução apresentada por Poisson.

Quando duas forças iguais agem sobre um mesmo ponto, seguindo direções diferentes, não há nenhuma razão para que sua resultante se aproxime mais de uma do que da outra; ela deve portanto cortar em duas partes iguais o ângulo compreendido entre suas direções; de modo que sua direção é conhecida, e que se trata apenas de determinar sua grandeza.

Para encontrá-la, sejam MA e MB as direções das componentes, cujo valor comum será representado por P ; [seja] $2x$ o ângulo AMB , e MC a direção da resultante, de tal modo que $AMC = BMC = x$. Sua intensidade só pode depender das quantidades P e x , das quais é uma função desconhecida; representando portanto por R o valor da resultante, teremos:

$$R = f(P, x).$$

Nesta equação, R e P são as únicas quantidades cuja expressão numérica varia com a unidade de força que se escolhe; sua razão R/p é independente dessa unidade; de onde se pode concluir que deve ser uma função simples de x , e, conseqüentemente, que a função $f(P, x)$ é da forma $P \cdot \phi x$. Assim, temos

$$R = P \cdot \phi x;$$

e a questão se reduz à determinação da forma da função ϕx . (POISSON, 1811, pp. 12-

13)

Vamos procurar explicitar as suposições de Poisson, para que fique mais claro o quão diferentes são das do artigo de Foncenex:

- SDP 1 – As unidades de cada tipo de quantidade mecânica são arbitrárias e independentes das outras unidades (exceção: quantidades geométricas).
- SDP 2 – As equações da mecânica devem permanecer válidas quando multiplicamos cada tipo de quantidade que aparece nelas por números escolhidos arbitrariamente e independentemente uns dos outros (notando-se, no entanto, que as quantidades geométricas não são independentes uma da outra).
- SDP 3 – Uma equação não pode conter uma só quantidade de algum tipo; e quando contém apenas duas, elas serão necessariamente proporcionais uma à outra.

Ao aplicar sua análise à dedução da lei do paralelogramo das forças, Poisson chegou ao mesmo resultado que Foncenex, embora suas premissas fossem completamente diferentes. Note-se que as suposições de Foncenex são compatíveis com a análise dimensional posterior, enquanto as de Poisson não o são. Porém, naquela época, as idéias de Poisson eram mais naturais do que as de Foncenex.

Parece que Poisson não deu grande importância ao princípio da homogeneidade, já que não o utilizou em outros pontos de seu livro. Aparentemente, sua única motivação para introduzir esse princípio no *Traité de mécanique* foi proporcionar uma justificação para a prova da lei de composição das forças.

Percebe-se que os conceitos de dimensão física e de homogeneidade das fórmulas não são tão simples quanto podem parecer, e que o desenvolvimento dessas idéias percorreu um caminho tortuoso, até chegar a uma forma mais clara e explícita, no final do século XIX.

APLICAÇÃO À GEOMETRIA

Como vimos, Foncenex sugeriu, em seu trabalho de 1761, que seu método de análise de dimensões poderia ser utilizado para “demonstrar [...] de um modo direto e natural, muitos teoremas acerca da proporcionalidade dos lados das figuras, e muitas outras proposições da geometria e da mecânica”. Essa sugestão deve ter inspirado Adrien-Marie Legendre que, em seu *Éléments de géométrie* publicado em 1794, procura provar o 5º postulado de Euclides (das paralelas), utilizando análise dimensional. Note-se que Legendre citou explicitamente o artigo de Foncenex, em sua obra⁷.

Em sua análise, Legendre procurou demonstrar o “postulado de Wallis”, a partir do qual é possível demonstrar o postulado das paralelas: “Para cada figura dada, existe uma figura semelhante de tamanho arbitrário”.

A demonstração de Legendre é a seguinte (ver figura 4):

Demonstra-se imediatamente, por superposição, e sem qualquer proposição preliminar, que *dois triângulos são iguais quando possuem um lado igual adjacente a dois ângulos respectivamente iguais*. Vamos chamar esse lado de p , os ângulos adjacentes de A e B , o terceiro ângulo de C . Exige-se portanto que o ângulo C esteja completamente determinado, quando os ângulos A e B e o lado p forem conhecidos; pois, se diversos

⁷ “Finalmente, devemos observar que a consideração de funções, que proporciona uma demonstração muito simples das proposições fundamentais da geometria, já foi empregada com sucesso na demonstração dos princípios fundamentais da mecânica. Ver as *Mémoires de Turin*, volume II”.

ângulos C pudessem corresponder às três quantidades A , B , p , haveria um número correspondente de diferentes triângulos que teriam um lado igual, adjacente a dois ângulos iguais, o que é impossível; portanto, o ângulo C deve ser uma função determinada das três quantidades A , B , p ; e eu exprimo isso assim, $C = \varphi(A, B, p)$.

Consideremos o ângulo reto igual à unidade; então, os ângulos A , B , C serão números compreendidos entre 0 e 2; e como $C = \varphi(A, B, p)$, digo que a linha p não pode entrar na função φ . De fato, vimos que C deve ser determinado completamente pelos dados A , B , p apenas, sem qualquer outro ângulo ou linha; mas a linha p é heterogênea com os números A , B , C ; e se houvesse alguma equação entre A , B , C , p , seria possível obter o valor de p de A , B , C ; portanto se seguiria que p é igual a um número, o que é absurdo; portanto, p não pode entrar na função φ , e temos simplesmente $C = \varphi(A, B)$.

Essa fórmula prova que, se dois ângulos de um triângulo são iguais a dois ângulos de um outro [triângulo], o terceiro ângulo do primeiro também deve ser igual ao terceiro do outro; e sendo concedido isso, é fácil chegar ao teorema que tínhamos em vista. (LEGENDRE, 1817, pp. 280-281)

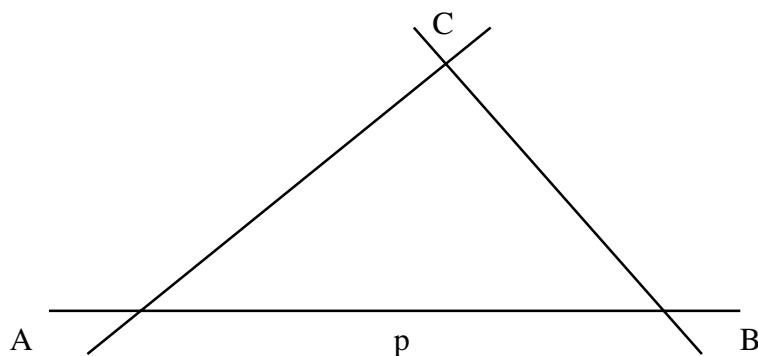


Figura 4. Triângulo utilizado na demonstração de Legendre.

O argumento de Legendre não contém a palavra “dimensão”, mas tem grande semelhança com a argumentação de Foncenex. Podemos considerar que o argumento de Legendre se baseia nas seguintes suposições, algumas das quais não foram explicitadas por ele:

- AML 1 – Ângulos são grandezas geométricas de dimensão zero – ou seja, são números (adimensionais).
- AML 2 – Uma função matemática de números (adimensionais) só pode gerar números (adimensionais).
- AML 3 – Uma linha (comprimento) não é um número, e não pode ser representada por números do modo como os ângulos o são.
- AML 4 – Quantidades heterogêneas (de diferentes naturezas) não podem ser iguais.
- AML 5 – Na equação $C = \varphi(A, B, p)$ existe apenas uma quantidade com dimensão geométrica não nula, e essa quantidade é a linha (comprimento) p .

Note-se que, se essa demonstração fosse rigorosamente correta e não exigisse nenhuma outra hipótese de natureza geométrica, Legendre teria provado a validade da geometria euclidiana. Havia no entanto uma outra premissa implícita, que foi percebida mais tarde. Em edições posteriores de sua obra (a partir da 11ª edição), Legendre introduziu uma nota em que respondeu a uma objeção que lhe foi feita:

Foi objetado contra esta demonstração que, se ela fosse aplicada, palavra por palavra, a triângulos esféricos, resultaria que dois ângulos conhecidos são suficientes para determinar o terceiro, o que não ocorre nesse tipo de triângulos. A resposta é que em triângulos esféricos existe um elemento a mais do que nos triângulos planos, e esse elemento é o raio da esfera, que não deve ser esquecido. Seja r o raio; então, em vez de $C = \varphi(A, B, p)$, teremos $C = \varphi(A, B, p, r)$, ou simplesmente $C = \varphi(A, B, p/r)$, pela lei da homogeneidade. Mas, como a razão p/r é um número, tal como A, B, C , nada impede que p/r seja obtido da função φ , e portanto não se pode concluir que $C = \varphi(A, B)$. (LEGENDRE, 1817, p. 281)

Portanto, a demonstração anterior só se sustenta se supusermos que *não existe nenhuma grandeza geométrica dimensional característica do espaço onde o triângulo é construído*. No caso das geometrias não-euclidianas, existe um parâmetro que é a curvatura gaussiana local (que tem dimensões do inverso de uma área), e por isso a situação é semelhante ao caso dos triângulos esféricos.

Na época (início do século XIX), muitos matemáticos aceitaram a prova de Legendre como correta. Houve críticas, porém por parte de autores de outros países – especialmente autores ingleses, como John Leslie⁸. Na França, o trabalho de Legendre foi considerado como um completamento da geometria clássica, tendo resolvido o problema do postulado das paralelas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O surgimento da análise dimensional refletiu um ambiente científico e epistemológico peculiar (francês) do final do século XVIII, quando se acreditava que as bases do conhecimento poderiam ser obtidas *a priori*. Embora Foncenex tenha nascido e vivido na região que atualmente consideramos como parte da Itália, sua formação científica foi francesa. Os principais autores que adotaram o método da análise dimensional, posteriormente, foram também franceses (Poisson e Legendre). E foi na França que Fourier desenvolveu, mais adiante, uma análise mais adequada do conceito de dimensão física.

Ao contrário do uso que se faz atualmente da análise dimensional, naquela época parecia que esse método permitiria provar os princípios fundamentais da mecânica e da geometria (e talvez de outras áreas). Seria difícil conceber o surgimento desse método em um contexto completamente diferente – um contexto no qual não se acreditasse na verdade da geometria clássica e da mecânica newtoniana, nem na possibilidade de um conhecimento fundamental *a priori*.

Evidentemente, a criação posterior das geometrias não-euclidianas invalidou a prova de Legendre e trouxe descrédito ao método⁹. Mais tarde, o método continuou a ser utilizado, porém dentro de uma outra visão sobre a ciência, e com objetivos bem mais modestos.

⁸ Lobatchewsky também criticou o trabalho de Legendre e considerou as leis de geometria como verdades empíricas.

⁹ O trabalho de Foncenex teve também relevância no contexto da geometria não-euclidiana. Ver MARTINS, 1995.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CROWE, M. J. *A history of vector analysis* Notre Dame: University of Notre Dame, 1967.
- D'ALEMBERT, Jean le Rond. *Traité de dynamique, dans lequel les loix de l'équilibre & du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une manière nouvelle, & où l'on donne un principe général pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque*. Paris: David, 1743.
- FONCENEX, Daviet de. Sur les quantités imaginaires. *Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis*, **1**: 113-146, 1759.
- . Sur les principes fondamentaux de la mécanique. *Mélanges de Philosophie et Matématique de la Société Royale de Turin* **2**: 299-322, 1760-1761.
- HOEFER, Jean Chrétien Ferdinand. Foncenex, François Daviet de. In: HOEFER, Jean Chrétien Ferdinand (ed.). *Nouvelle biographie depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours*. Paris: Firmin Didot, 1857-1866. 46 vols. Vol. 13, p. 240.
- LEGENDRE, Adrien-Marie. *Éléments de géométrie*. 11. ed. Paris: Firmin-Didot, 1817.
- MARTINS, Roberto de Andrade. The origin of dimensional analysis. *Journal of the Franklin Institute*, **311**: 331-337, 1981.
- . A influência das geometrias não-euclidianas no pensamento físico do século XIX. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência* (13): 67-79, 1995.
- MICHAUD, Louis-Gabriel. Foncenet [sic], François Daviet de. In: MICHAUD, Louis-Gabriel (ed.). *Biographie universelle ancienne et moderne, ou dictionnaire de tous les hommes qui se sont fait remarquer par leurs écrits, leurs actions... depuis le commencement du monde jusqu'à ce jour*. Nouvelle édition, revue, corrigée, et considérablement augmenté d'articles omis, nouveaux, et de célébrités Belges. Bruxelles: H. Ode, 1843-1847. 21 vols. Vol. 7, p. 321.
- POISSON, Siméon Denis. *Traité de mécanique*. 1. ed. Paris: Mme. Veuve Courcier, 1811. 2 vols.
- . *Traité de mécanique*. 2. ed. Paris: Bachelier, 1833. 2 vols.