Fundamentos de Cosmologia

Aula 4

AST-413-4 - INPE - 2020-3

Prof. Dr. Carlos Alexandre Wuensche
Prof. Dra. Christine Córdula Dantas

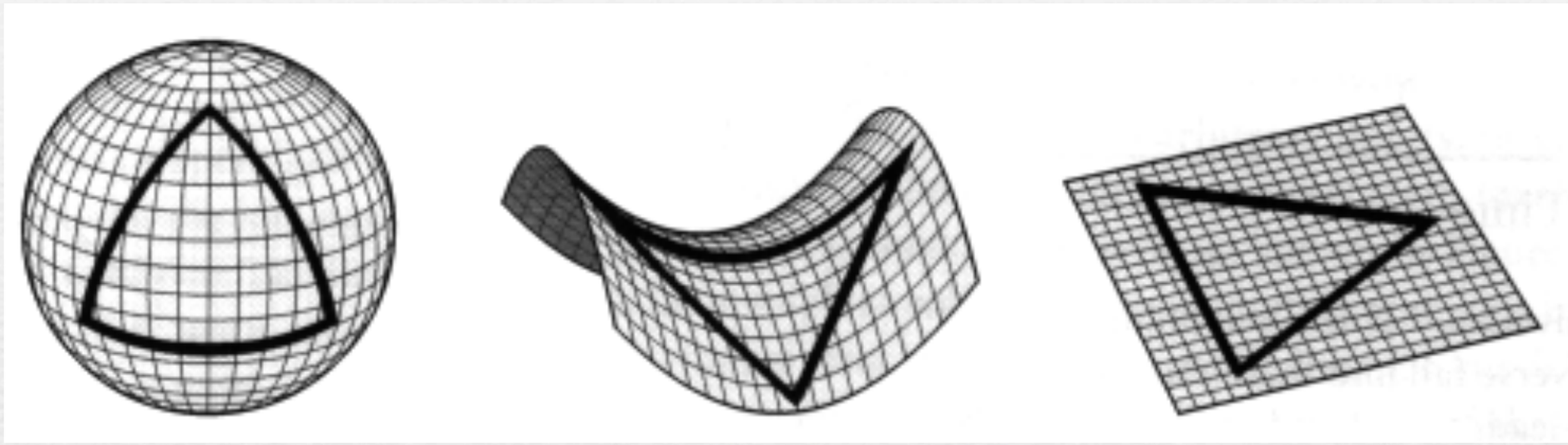
4. Dinâmica Cósmica

- 4.0 Introdução
- 4.1 A Equação de Einstein
- 4.2 A Equação de Friedmann
- 4.3 As Equações de Fluido e de Aceleração
- 4.4 As Equações de Estado
- 4.5 A Constante Cosmológica

4.0 Introdução

O Universo é curvo?

Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo sobre a superfície bidimensional.



$\kappa = +1$ $\kappa = -1$ $\kappa = 0$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \pm \frac{\kappa A}{R_0^2}$$

4.0 Introdução



Nikolai Lobachevsky
(1792-1856)

Um dos fundadores da geometria não-Euclideana

Propôs testes observacionais para determinar se o Universo é curvo.

Podemos concluir, a partir de argumentos geométricos, que se o Universo é curvo, o raio de curvatura (R_0) não pode ser muito menor que a distância de Hubble ($c/H_0 \sim 4380$ Mpc).

https://en.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Lobachevsky#/media/File:Lobachevsky.jpg

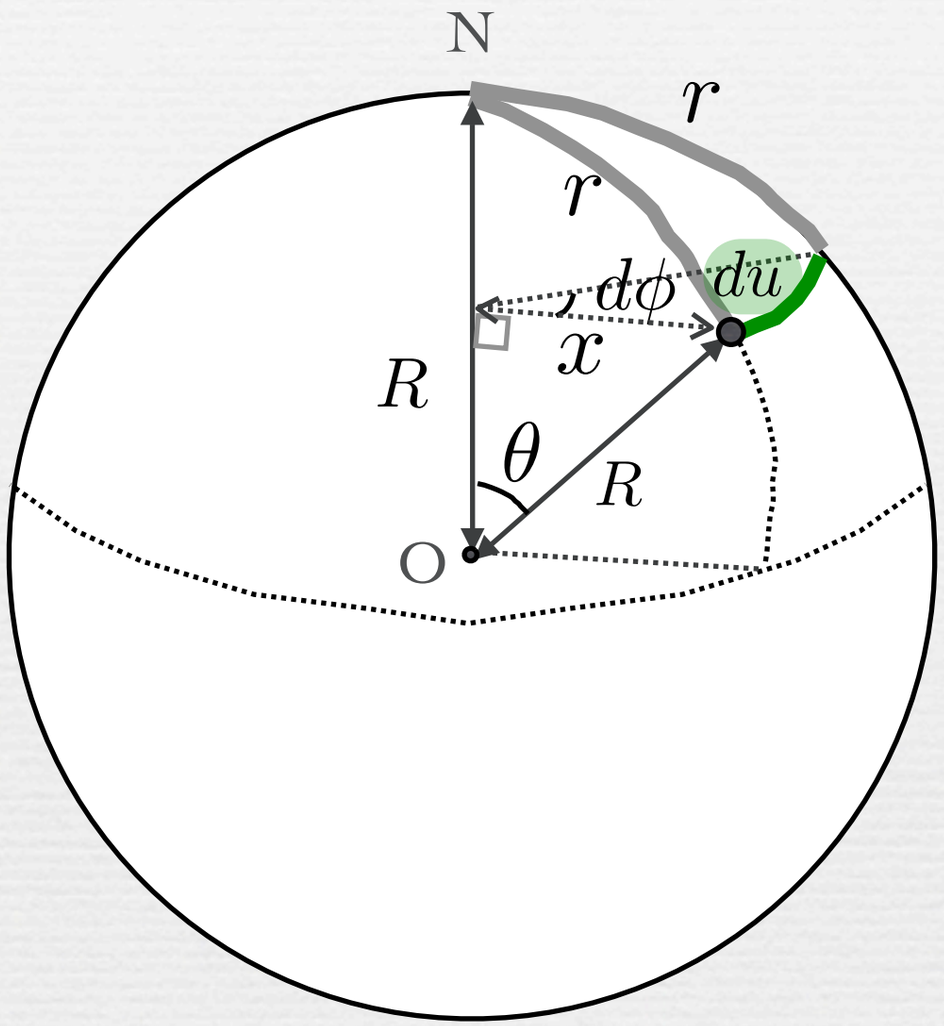
Considere uma galáxia com tamanho **D**, a uma distância **r** da Terra.

Qual o tamanho angular (α) observado da galáxia?

A) Universo plano, no limite: $D \ll r$

$$\alpha = \frac{D}{r}$$

B) Universo com curvatura positiva (observador em N):



$$d\phi \mapsto \alpha_+$$
$$du \mapsto D$$
$$R \mapsto R_0$$

Raio de curvatura atual

$$\alpha_+ = \frac{D}{R_0 \sin(r/R_0)}$$

$$r = \pi R_0 \Rightarrow \alpha_+ \to \infty$$

A galáxia observada a essa distância preencheria todo o céu.

$$r < \pi R_0 \Rightarrow \alpha_+ > \frac{D}{r}$$

A galáxia observada apareceria maior do que num universo plano.

$$\theta = \frac{r}{R}$$
$$x = R\sin(r/R)$$
$$du = xd\phi = R\sin(r/R)d\phi$$

Se o Universo tem curvatura positiva, então: →

$$\pi R_0 > \frac{c}{H_0}$$

Temos observações na escala da distância de Hubble

C) Universo com curvatura negativa:

$$\alpha_- = \frac{D}{R_0 \sinh(r/R_0)} < \frac{D}{r}$$

$r \gg R_0$: Usamos a aproximação: $\sinh(x) \approx \frac{1}{2}\exp(x)$

$$\alpha_- \approx \frac{2D}{R_0} \exp\left(-\frac{r}{R_0}\right)$$

A galáxia observada apareceria exponencialmente pequena para distâncias maiores do que o raio de curvatura.

Se o Universo tem curvatura negativa, então: →

$$R_0 > \frac{c}{H_0}$$

Temos observações na escala da distância de Hubble

4.1 A Equação de Einstein

Gravitação Newtoniana

Gravitação é uma força que se propaga instantaneamente entre corpos materiais.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -m\nabla\Phi(\vec{r})$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi(\vec{r})$$

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r})$$

Dada a densidade de massa, podemos obter o potencial gravitacional e, a partir dele, obter a aceleração e, assim, traçar as trajetórias de objetos que se movem sobre a influência do campo gravitacional.

4.1 A Equação de Einstein

Relatividade Geral

Gravitação é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Soluções admitem propagação de ondas do espaço-tempo.

Analogamente ao caso Newtoniano, podemos usar a Equação de Einstein para computar a curvatura do espaço-tempo a partir da densidade de energia, pressão e outras propriedades materiais. Obtida a curvatura, a trajetória inercial (livre) de um objeto pode ser determinada pela geodésica apropriada à curvatura do espaço-tempo.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

4.1 A Equação de Einstein

Parece simples, mas não é. A equação é escrita de forma compacta. Vamos analisá-la em detalhes.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

índices: 0, 1, 2, 3

Tensor de Einstein →

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Tensor 4x4 que descreve a curvatura do espaço-tempo em cada coordenada (t,x,y,z).

Simétrico: $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$

Possui 10 componentes independentes

índices: 0, 1, 2, 3

Tensor de Einstein → $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ ← **Tensor de energia-momento ("stress-energy")**

Tensor 4x4 que descreve a curvatura do espaço-tempo em cada coordenada (t,x,y,z).

Simétrico: $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$

Possui 10 componentes independentes

Tensor 4x4 que descreve o fluxo de energia e momento.

Simétrico: $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$

Possui 10 componentes independentes

índices: 0, 1, 2, 3

Tensor de Einstein → $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ ← **Tensor de energia-momento ("stress-energy")**

Tensor 4x4 que descreve a curvatura do espaço-tempo em cada coordenada (t,x,y,z).

Simétrico: $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$

Possui 10 componentes independentes

Tensor 4x4 que descreve o fluxo de energia e momento.

Simétrico: $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$

Possui 10 componentes independentes

A Eq. de Einstein é na verdade um conjunto de 10 equações diferenciais não-lineares de 2a. ordem.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

A Eq. de Einstein é um conjunto de 10 equações diferenciais não-lineares de 2a. ordem.

Soluções exatas da eq. de Einstein só podem ser encontradas sob condições simplificadoras, como a presença de simetria geométrica e/ou da distribuição de energia e matéria.

Não iremos comentar sobre soluções exatas, mas faremos considerações gerais sobre as propriedades das soluções.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

A Eq. de Einstein é um conjunto de 10 equações diferenciais não-lineares de 2a. ordem.

Eq. de Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})$$

Eq. de Laplace

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 0$$

A eq. de Poisson também é uma equação diferencial de 2a. ordem. Mesmo se a densidade de massa é nula numa dada região, ainda assim a aceleração de um objeto devido ao campo gravitacional local poderá ser não-nula.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Phi(x,y) = X(x)Y(y)$$

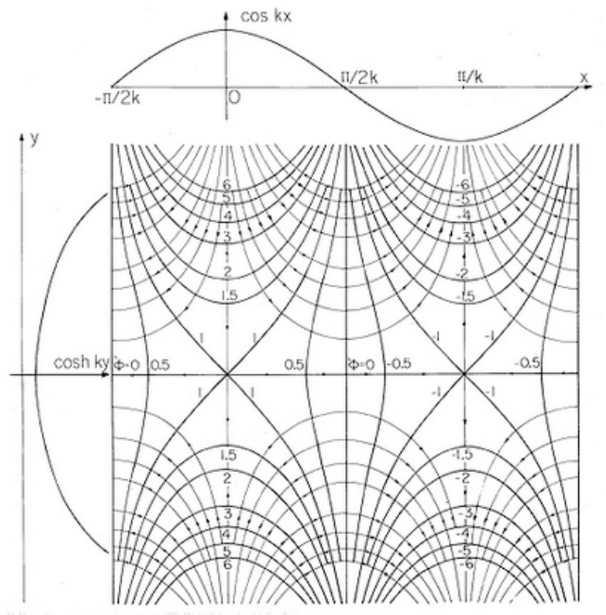
$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -k^2 X$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = k^2 Y$$

$$X \sim \cos kx \quad \text{or} \quad \sin kx$$

$$Y \sim \cosh ky \quad \text{or} \quad \sinh ky$$



http://web.mit.edu/6.013_book/www/chapter5/5.4.html

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

A Eq. de Einstein é um conjunto de 10 equações diferenciais não-lineares de 2a. ordem.

Eq. de Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})$$

Eq. de Laplace

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 0$$

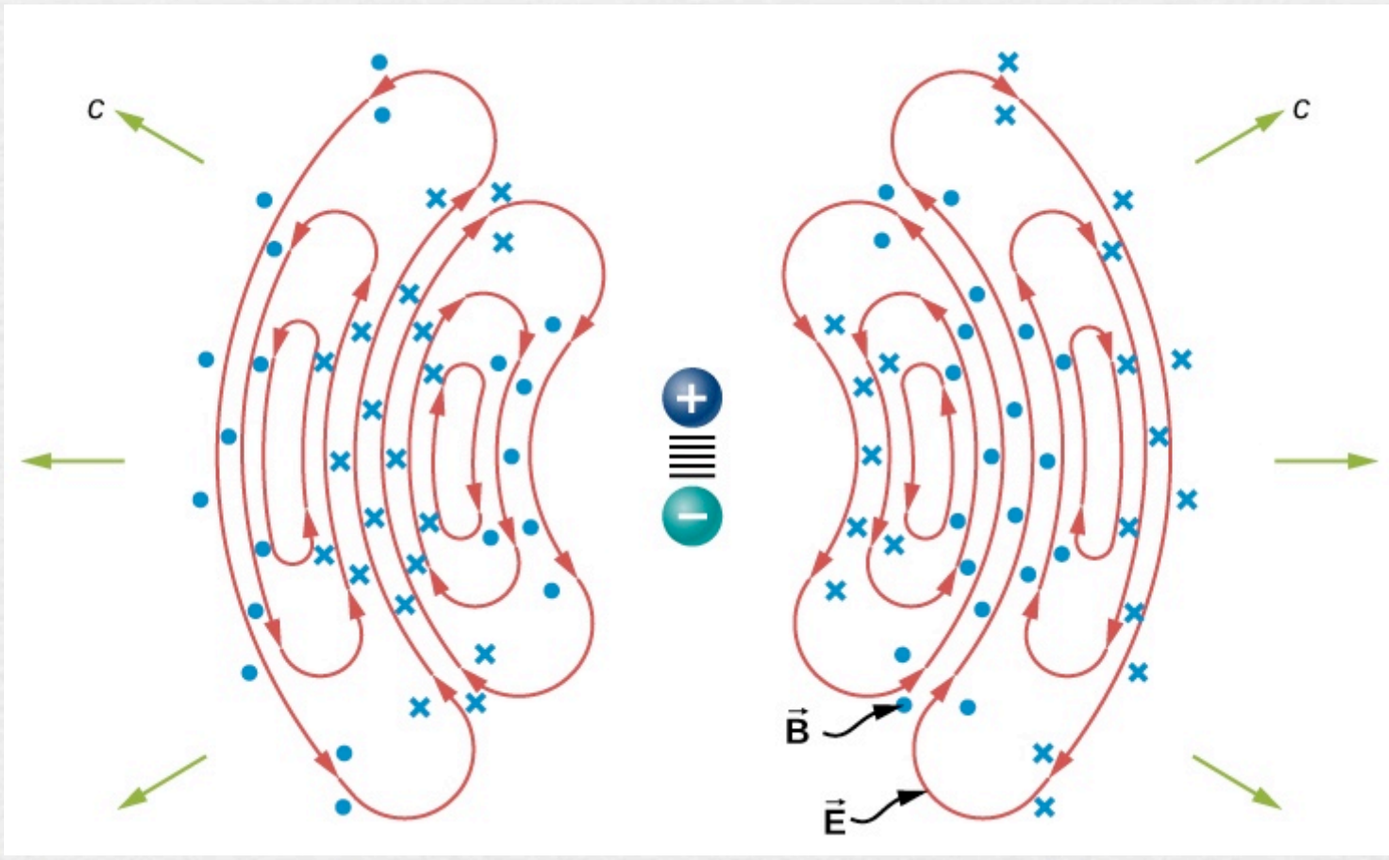
A eq. de Poisson também é uma equação diferencial de 2a. ordem. Mesmo se a densidade de massa é nula numa dada região, ainda assim a aceleração de um objeto devido ao campo gravitacional local poderá ser não-nula.

Similarmente à eq. de Poisson, a eq. de Einstein também admite soluções em que a curvatura do espaço-tempo é diferente de zero mesmo se o tensor energia-momento for nulo.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

A Eq. de Einstein é um conjunto de 10 equações diferenciais não-lineares de 2a. ordem.

Outra propriedade de equações diferenciais de 2a. ordem, envolvendo espaço e tempo: a existência de soluções de ondas propagantes (distúrbios que se propagam no espaço em função do tempo).



Eletromagnetismo: dipolo elétrico que varia com o tempo gera ondas eletromagnéticas

https://openstax.org/books/university-physics-volume-2/pages/16-2-plane-electromagnetic-waves

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

A Eq. de Einstein é um conjunto de 10 equações diferenciais não-lineares de 2a. ordem.

Outra propriedade de equações diferenciais de 2a. ordem, envolvendo espaço e tempo: a existência de soluções de ondas propagantes (distúrbios que se propagam no espaço em função do tempo).

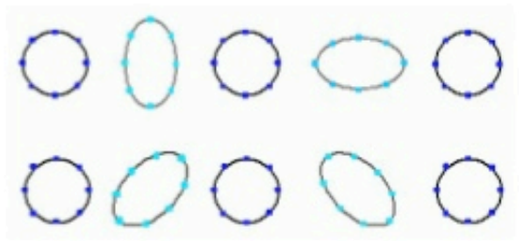
Basics of Gravitational Waves

In linearized GR (Einstein 1916,1918): $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$

Two Transverse-Traceless (TT) tensor polarizations propagating at v=c

$$h_{ij} = h_{+}(x_i x_j - y_i y_j) + h_{\times}(x_i y_j + y_i x_j)$$

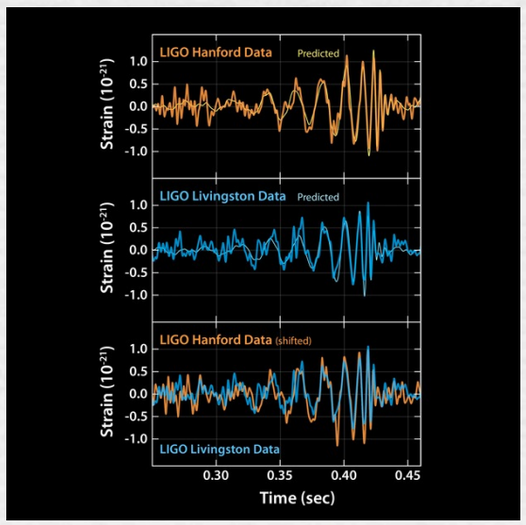
$$\frac{\delta L}{L} = \frac{1}{2} h_{ij} n^i n^j$$



Lowest-order generation: quadrupole formula $h_{ij} \simeq \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij}^{TT}(t - r/c)$

https://www.slideshare.net/lakecomoschool/gravitational-waves-and-binary-systems-1

Em RG, um quadrupolo de massa-energia que varia no tempo gera ondas gravitacionais.



1a detecção de OGs: LIGO (2015)

https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20160211a

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

A Eq. de Einstein é um conjunto de 10 equações diferenciais não-lineares de 2a. ordem.

Para casos gerais, o tensor energia-momento pode ser muito complicado e muito difícil de ser calculado.

Muito mais simples para o caso do universo preenchido por um gás perfeito homogêneo e isotrópico.

Neste caso, um observador num universo em expansão homogênea e isotrópica irá medir a densidade de energia e pressão do gás ideal como funções apenas do tempo cósmico.

Neste caso idealizado, o tensor energia-momento depende apenas da densidade de energia e pressão do gás ideal como funções do tempo cósmico.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

No caso simplificado, o tensor energia-momento depende apenas da densidade de energia e pressão do gás ideal como funções do tempo cósmico.

A métrica neste caso simplificado será a de FLRW.

Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_\kappa^2(r) d\Omega^2]$$

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R_0 \sin(r/R_0) & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R_0 \sinh(r/R_0) & (\kappa = -1) \end{cases}$$

Parâmetros que descrevem a curvatura do espaço-tempo

$a(t)$
κ
R_0



$\epsilon(t)$
$P(t)$

Parâmetros que descrevem o conteúdo do universo

4.2 A Equação de Friedmann

$a(t)$
κ
R_0

Equação de Friedmann

$\epsilon(t)$
$P(t)$



Alexander Friedmann
(1888-1925)

1922: Aplicação da Eq. de Einstein para um universo homogêneo e isotrópico, resultando em expansão e contração.



1927: Interpretação do redshift em termos de um universo em expansão.



1929: Evidência observacional do universo em expansão (lei de Hubble)

https://en.wikipedia.org/wiki/Georges_Lema%C3%AEtre#/media/File:Portrait_Georges_Lemaitre.jpg

https://en.wikipedia.org/wiki/Edwin_Hubble#/media/File:Studio_portrait_photograph_of_Edwin_Powell_Hubble_(cropped).JPG

https://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Friedmann#/media/File:Aleksandr_Fridman.png

Alguns aspectos da eq. de Friedmann podem ser entendidos via dinâmica Newtoniana.

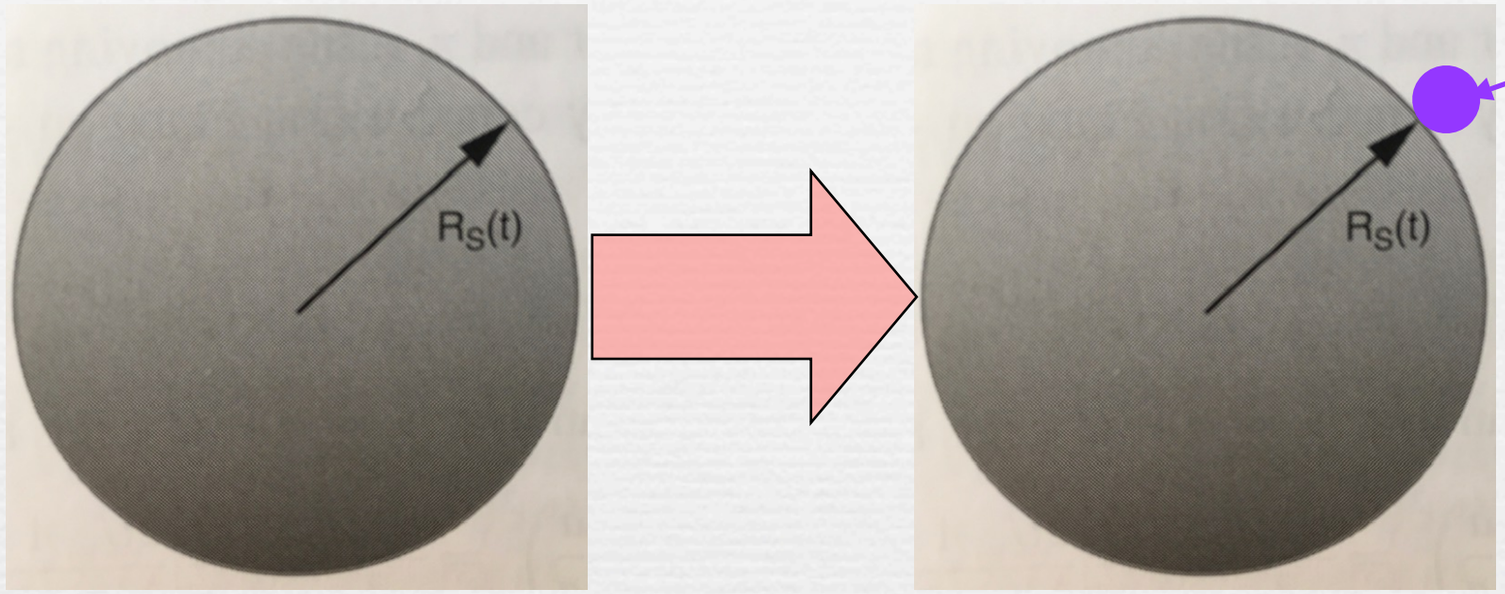
Passos:

a) Derivação do equivalente não-relativístico da eq. de Friedmann, obtendo a formulação Newtoniana da expansão e contração do universo.

b) Inclusão de modificações (sem demonstração) na expressão obtida em (a), necessárias para obter a forma relativística (correta) da eq. de Fridmann.

4.2 A Equação de Friedmann

a) Derivação do equivalente não-relativístico da eq. de Friedmann, obtendo a formulação Newtoniana da expansão e contração do universo.



Esfera homgênea, de massa M_S (constante), expandindo e contraindo isotropicamente, de forma que o raio é $R_S(t)$.

Objeto de teste, com massa infinitesimal m.

Força gravitacional experimentada pelo objeto:

$$F = -\frac{GM_S m}{R_S(t)^2}$$

Da 2a. lei de Newton: $$\frac{d^2R_S}{dt^2} = -\frac{GM_S}{R_S(t)^2}$$

$\left(\times \frac{dR_S}{dt}\right)$ e integrando: $$\frac{1}{2}\left(\frac{dR_S}{dt}\right)^2 = \frac{GM_S}{R_S(t)} + U$$

constante de integração

4.2 A Equação de Friedmann

a) Derivação do equivalente não-relativístico da eq. de Friedmann, obtendo a formulação Newtoniana da expansão e contração do universo.

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dR_S}{dt}\right)^2}_{\epsilon_{\text{kin}}} \underbrace{- \frac{GM_S}{R_S(t)}}_{\epsilon_{\text{pot}}} = \underbrace{U}_{\text{constante}}$$

ϵ_{kin}: Energia cinética por unidade de massa

ϵ_{pot}: Energia potencial gravitacional por unidade de massa

Como M_S é constante: $M_S = \frac{4\pi}{3}\rho(t)R_S(t)^3$

Como a expansão / contração é isotrópica: $R_S(t) = a(t)r_S$

$a(t)$: fator de escala

r_S: raio comóvel da esfera

4.2 A Equação de Friedmann

a) Derivação do equivalente não-relativístico da eq. de Friedmann, obtendo a formulação Newtoniana da expansão e contração do universo.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR_S}{dt}\right)^2 = \frac{GM_S}{R_S(t)} + U$$

$$M_S = \frac{4\pi}{3}\rho(t)R_S(t)^3$$

$$R_S(t) = a(t)r_S$$

$$\frac{1}{2}r_S^2\dot{a}^2 = \frac{4\pi}{3}Gr_S^2\rho(t)a(t)^2 + U$$

$$\left(\times \frac{2}{r_S^2 a^2}\right)$$

Eq. de Friedmann em forma Newtoniana

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{r_S^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (1)$$

4.2 A Equação de Friedmann

a) Derivação do equivalente não-relativístico da eq. de Friedmann, obtendo a formulação Newtoniana da expansão e contração do universo.

Esfera em contração

$\dot{a} < 0$

reverso temporal

Esfera em expansão

$\dot{a} > 0$

Eq. de Friedmann em forma Newtoniana

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{r_S^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (1)$$

4.2 A Equação de Friedmann

a) Derivação do equivalente não-relativístico da eq. de Friedmann, obtendo a formulação Newtoniana da expansão e contração do universo.

Escolhendo este caso, em analogia ao universo em expansão, temos que o estado futuro da esfera resulta em 3 classes possíveis, dependendo do sinal de U.

Esfera em contração

$\dot{a} < 0$

reverso temporal

Esfera em expansão

$\dot{a} > 0$

Eq. de Friedmann em forma Newtoniana

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{r_S^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (1)$$

4.2 A Equação de Friedmann

a) Derivação do equivalente não-relativístico da eq. de Friedmann, obtendo a formulação Newtoniana da expansão e contração do universo.

U > 0: Lado direito de (1) > 0 $\Rightarrow (\dot{a})^2 > 0$

A expansão nunca pára.

U < 0: Lado direito de (1) começa > 0, porém, numa escala $\mathbf{a_{max}}$, o lado direito de (1) = 0, e **a expansão pára.** Nesse ponto:

$\ddot{a} < 0$ **e a esfera contrai.**

$$a_{\max} = -\frac{GM_S}{Ur_S}$$

U = 0: $\lim_{t\to\infty,\rho\to 0} \dot{a} = 0$

Caso limítrofe.

Escolhendo este caso, em analogia ao universo em expansão, temos que o estado futuro da esfera resulta em 3 classes possíveis, dependendo do sinal de U.

Esfera em expansão

$$\dot{a} > 0$$

Eq. de Friedmann em forma Newtoniana

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{r_S^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (1)$$

4.2 A Equação de Friedmann

a) Derivação do equivalente não-relativístico da eq. de Friedmann, obtendo a formulação Newtoniana da expansão e contração do universo.

U > 0: Lado direito de (1) > 0 $\Rightarrow (\dot{a})^2 > 0$

A expansão nunca pára.

U < 0: Lado direito de (1) começa > 0, porém, numa escala $\mathbf{a_{max}}$, o lado direito de (1) = 0, e **a expansão pára.** Nesse ponto:

$\ddot{a} < 0$ **e a esfera contrai.**

$$a_{\max} = -\frac{GM_S}{Ur_S}$$

U = 0: $\lim_{t\to\infty,\rho\to 0} \dot{a} = 0$

Caso limítrofe.

Esses casos são análogos aos casos possíveis ao se atirar um objeto para cima a partir da superfície da Terra.

Eq. de Friedmann em forma Newtoniana

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{r_S^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (1)$$

NOTA:

A eq. de Friedmann em forma Newtoniana é útil para uma compreensão qualitativa de como um objeto em expansão isotrópica se comporta sob a influência da sua própria gravidade, porém não atende em aplicações mais precisas em cosmologia.

Problemas:

1) Um volume esférico finito de raio R_S não pode representar um universo homogêneo e isotrópico, pois o centro da esfera é um ponto especial, o que viola homogeneidade; e em qualquer ponto existe uma direção especial (apontando para o centro), o que viola isotropia.

2) Se imaginarmos a esfera como uma cavidade em uma distribuição infinita, homogênea e isotrópica, a dinâmica Newtoniana estabelece que a aceleração dentro da cavidade é igual a zero.

Se divirmos a região fora da cavidade esférica em camadas concêntricas, o objeto-teste de massa *m* em R_S não experimenta aceleração resultante de massa em $R > R_S$. Mas neste caso, o espaço assumido é Euclideano, o que não corresponde necessariamente ao nosso Universo.

b) Inclusão de modificações (sem demonstração) na expressão obtida em (a), necessárias para obter a forma relativística (correta) da eq. de Fridmann.

Eq. de Friedmann em forma Newtoniana

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{r_S^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (1)$$

Eq. de Friedmann em forma relativística

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (2)$$

b) Inclusão de modificações (sem demonstração) na expressão obtida em (a), necessárias para obter a forma relativística (correta) da eq. de Fridmann.

Eq. de Friedmann em forma Newtoniana

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{r_S^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (1)$$

Eq. de Friedmann em forma relativística

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (2)$$

b) Inclusão de modificações (sem demonstração) na expressão obtida em (a), necessárias para obter a forma relativística (correta) da eq. de Fridmann.

Eq. de Friedmann em forma Newtoniana

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{r_S^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (1)$$

Eq. de Friedmann em forma relativística

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (2)$$

NOTAS:

$$\rho(t) \mapsto \frac{\epsilon(t)}{c^2}$$

$$E = (m^2c^4 + p^2c^2)^{\frac{1}{2}}$$

momento da partícula, tal como medido por um observador no local da partícula, que observa o universo expandindo isotropicamente

NOTAS:

$$\rho(t) \mapsto \frac{\epsilon(t)}{c^2}$$

$$E = (m^2c^4 + p^2c^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_{\text{pec}} \ll c \Rightarrow p \approx mv_{\text{pec}}$$

$$E_{\text{nonrel}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{v_{\text{pec}}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{\text{nonrel}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{pec}}^2$$

velocidade associada a qualquer movimento da partícula, além daquele associado à expansão / contração do universo

NOTAS:

$$\rho(t) \mapsto \frac{\epsilon(t)}{c^2}$$

$$E = (m^2c^4 + p^2c^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_{\text{pec}} \ll c \Rightarrow p \approx mv_{\text{pec}}$$

$$E_{\text{nonrel}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{v_{\text{pec}}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{\text{nonrel}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{pec}}^2 \longleftarrow$$

se o universo contém apenas partículas massivas que se movem lentamente, a densidade de energia seria

$$\epsilon \approx \rho c^2 + \Delta\epsilon$$

NOTAS:

$$\rho(t) \mapsto \frac{\epsilon(t)}{c^2}$$

$$E = (m^2c^4 + p^2c^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_{\text{pec}} \ll c \Rightarrow p \approx mv_{\text{pec}}$$

$$E_{\text{nonrel}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{v_{\text{pec}}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{\text{nonrel}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{pec}}^2$$

$$E_{\text{rel}} \approx pc = hf$$

porém, fótons e outras partículas sem massa também contêm energia, que contribuem para a densidade de energia total do universo

NOTAS:

$$\rho(t) \mapsto \frac{\epsilon(t)}{c^2}$$

$$E = (m^2c^4 + p^2c^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_{\text{pec}} \ll c \Rightarrow p \approx mv_{\text{pec}}$$

$$E_{\text{nonrel}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{v_{\text{pec}}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{\text{nonrel}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{pec}}^2$$

$$E_{\text{rel}} \approx pc = hf$$

$$\frac{2U}{r_S^2} \mapsto -\frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$U < 0 \mapsto \kappa = +1$$

$$U > 0 \mapsto \kappa = -1$$

$$U = 0 \mapsto \kappa = 0$$

Eq. de Friedmann em forma relativística

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \tag{2}$$

Como conectar a Eq. de Friedmann a observáveis?

Parâmetro de Hubble

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

$$v(t) = H(t)d(t)$$

velocidade de recessão — distância própria

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \tag{3}$$

$$H_0 = H(t_0) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0} = 68 \pm 2 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$$

Constante de Hubble

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (3)$$

Eq. de Friedmann avaliada no momento presente ("0"):

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_0 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \qquad (4)$$

- H_0^2: **taxa de expansão atual**
- ϵ_0: **densidade de energia atual**
- $\frac{\kappa c^2}{R_0^2}$: **curvatura atual**

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (3)$$

Eq. de Friedmann num universo espacialmente plano: $(\kappa = 0)$

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) \qquad (4)$$

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (3)$$

Eq. de Friedmann num universo espacialmente plano: $(\kappa = 0)$

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) \qquad (4)$$

Para qualquer valor de H(t), existe uma densidade crítica:

$$\epsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G}H(t)^2 \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \epsilon(t) > \epsilon_c(t) \Rightarrow \kappa = +1 \\ \epsilon(t) < \epsilon_c(t) \Rightarrow \kappa = -1 \end{aligned}\right\}$$

4.2 A Equação de Friedmann

$$\epsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2$$

Knowing the Hubble constant to within about 3%, we can compute the current value of the critical density to within about 6%:

$$\varepsilon_{c,0} = \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2 = (7.8 \pm 0.5) \times 10^{-10}\,\mathrm{J\,m^{-3}} = 4870 \pm 290\,\mathrm{MeV\,m^{-3}}. \quad (4.31)$$

The critical density is frequently written as the equivalent mass density,

$$\rho_{c,0} \equiv \frac{\varepsilon_{c,0}}{c^2} = (8.7 \pm 0.5) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \quad (4.32)$$
$$= (1.28 \pm 0.08) \times 10^{11}\,\mathrm{M_\odot\,Mpc^{-3}}.$$

The current critical density is roughly equivalent to a density of one proton per 200 liters. This is definitely not a large density, by terrestrial standards; a 200-liter drum filled with liquid water, for instance, contains $\sim 10^{29}$ protons and neutrons. The critical density is not even a large density by the standards of interstellar space within our galaxy; even the hottest, most tenuous regions of the interstellar medium have a few protons per liter. However, keep in mind that most of the volume of the universe consists of intergalactic voids, where the density is extraordinarily low. When averaged over scales of 100 Mpc or more, the mean energy density of the universe, as it turns out, is very close to the critical density.

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (3)$$

$$\epsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G}H(t)^2 \qquad (5)$$

Em termos do parâmetro de densidade adimensional:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_c(t)} \qquad (6)$$

$0.995 < \Omega_0 < 1.005$

(observações)

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \qquad (7)$$

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \qquad (7)$$

este lado da equação não muda de sinal com a expansão

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \qquad (7)$$

este lado da equação não muda de sinal com a expansão

logo este lado da equação também não muda de sinal

Se: $\left\{ \begin{array}{l} \Omega > 1 \\ \Omega < 1 \\ \Omega = 1 \end{array} \right\}$ **em qualquer dado tempo, então assim permanece para todos os tempos**

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \qquad (7)$$

Eq. de Friedmann avaliada no momento presente ("0"):

$$1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2}$$

Se conhecemos Omega_0, conhecemos o sinal da curvatura.

$$\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1)$$

Se conhecemos também a distância de Hubble, conhecemos o raio de curvatura R_0.

$$D_H = \frac{c}{H_0}$$

4.3 As Equações de Fluido e de Aceleração

Eq. de Friedmann em forma relativística

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (2)$$

supor conhecidos

$$\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1)$$

condições de contorno (valores atuais)

4.3 As Equações de Fluido e de Aceleração

Eq. de Friedmann em forma relativística

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (2)$$

1 equação com 2 variáveis desconhecidas: $a(t)$ e $\epsilon(t)$

supor conhecidos

$$\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1)$$

condições de contorno (valores atuais)

É necessária mais uma equação relacionando a(t) e ϵ(t).

É necessária mais uma equação relacionando a(t) e ϵ(t).

Recordando da derivação do equivalente não-relativístico da eq. de Friedmann:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dR_S}{dt}\right)^2}_{\epsilon_{\text{kin}}} \underbrace{- \frac{GM_S}{R_S(t)}}_{\epsilon_{\text{pot}}} = \underbrace{U}_{\text{constante}}$$

ϵ_{kin}: Energia cinética por unidade de massa

ϵ_{pot}: Energia potencial gravitacional por unidade de massa

É necessária mais uma equação relacionando a(t) e ϵ(t).

Recordando da derivação do equivalente não-relativístico da eq. de Friedmann:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dR_S}{dt}\right)^2}_{\epsilon_{\text{kin}}} \underbrace{- \frac{GM_S}{R_S(t)}}_{\epsilon_{\text{pot}}} = \underbrace{U}_{\text{constante}}$$

Energia cinética por unidade de massa

Energia potencial gravitacional por unidade de massa

Manifestação similar da conservação de energia:

1a. Lei da Termodinâmica

$$dQ = dE + PdV \qquad (8)$$

É necessária mais uma equação relacionando a(t) e ϵ(t).

$$dQ = dE + PdV$$

$$dQ = 0$$

processo adiabático

para um volume comóvel num universo em expansão, pois não há fluxo de calor para dentro ou fora do volume

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad \Rightarrow dS = 0$$

num universo em expansão homogênea e isotrópica, a entropia não aumenta

É necessária mais uma equação relacionando a(t) e ϵ(t).

$$dQ = dE + PdV$$

$$dQ = 0$$

processo adiabático

para um volume comóvel num universo em expansão, pois não há fluxo de calor para dentro ou fora do volume

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad \Rightarrow dS = 0$$

num universo em expansão homogênea e isotrópica, a entropia não aumenta

$$\left.\begin{aligned} \dot{E} + P\dot{V} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\dot{V} = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

$R_S(t) = a(t)r_S$

raio próprio — raio comóvel

esfera se expandindo junto com a expansão do universo

$$\dot{E} = V\left(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon\right)$$

$E(t) = V(t)\epsilon(t)$

energia interna da esfera

É necessária mais uma equação relacionando a(t) e ϵ(t).

Equação de fluido

$$\left.\begin{aligned} dQ &= dE + PdV \\ dQ &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \qquad (9)$$

1a. lei da termodinâmica num universo em expansão homogênea e isotrópica

Nota: mesma forma Newtoniana e relativística

É necessária mais uma equação relacionando a(t) e ϵ(t).

Equação de fluido

$$\left.\begin{aligned} dQ &= dE + PdV \\ dQ &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \qquad (9)$$

1a. lei da termodinâmica num universo em expansão homogênea e isotrópica

Nota: mesma forma Newtoniana e relativística

Eq. de Friedmann em forma relativística

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (2)$$

As eqs. (2) e (9) podem ser combinadas numa **equação de aceleração** para a expansão do universo.

As eqs. (2) e (9) podem ser combinadas numa equação de aceleração:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (2)$$

$$\times a^2 \longrightarrow \frac{d}{dt}[eq] \longrightarrow \div 2\dot{a}a \longrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\dot{\epsilon}\frac{a}{\dot{a}} + 2\epsilon\right)$$

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \qquad (9) \longrightarrow \dot{\epsilon}\frac{a}{\dot{a}} = -3(\epsilon + P)$$

As eqs. (2) e (9) podem ser combinadas numa equação de aceleração:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad (2)$$

$$\times a^2 \rightarrow \frac{d}{dt}[eq] \rightarrow \div 2\dot{a}a \rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\dot{\epsilon}\frac{a}{\dot{a}} + 2\epsilon\right)$$

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \qquad (9) \rightarrow \dot{\epsilon}\frac{a}{\dot{a}} = -3(\epsilon + P)$$

Equação de aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) \qquad (10)$$

Equação de aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) \qquad (10)$$

$\epsilon > 0$ e $P > 0 \Longrightarrow \ddot{a} < 0$

reduz a velocidade relativa entre dois pontos quaisquer no universo: expansão desacelera

gás de matéria bariônica, gás de fótons, gás de neutrinos, gás de WIMPS...

$\epsilon > 0$ e $P < -\frac{1}{3} \Longrightarrow \ddot{a} > 0$ **expansão acelera**

4.4 As Equações de Estado

Obtivemos as três equações (2), (9) e (10), porém somente duas são independentes, pois a eq. (10) foi obtida das eqs. (2) e (9).

Logo, temos um sistema de duas equações com três variáveis desconhecidas, a saber: **a(t)**, **ϵ(t)** e **P(t)**.

Eq. de Friedmann em forma relativística

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \tag{2}$$

Equação de fluido

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \tag{9}$$

Equação de aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) \tag{10}$$

É necessária mais uma equação relacionando P(t) e ϵ(t).

Equação de estado $P = P(\epsilon)$

As substâncias relevantes em cosmologia possuem equações de estado que podem ser escritas numa forma linear simples.

$$P = w\epsilon \qquad (11)$$

w: adimensional

É necessária mais uma equação relacionando P(t) e ϵ(t).

Equação de estado $P = P(\epsilon)$

As substâncias relevantes em cosmologia possuem equações de estado que podem ser escritas numa forma linear simples.

$$P = w\epsilon \qquad (11)$$

w: adimensional

Exemplo 1:

Gás de baixa densidade, de partículas massivas não-relativísticas:

$$P_{\text{nonrel}} = w\epsilon_{\text{nonrel}}$$

$$w \approx= \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \ll 1$$

$$P = \frac{\rho}{\mu} kT \qquad \epsilon \approx \rho c^2 \longrightarrow \qquad P \approx \frac{kT}{\mu c^2}\epsilon$$

μ: massa média

$$3kT = \mu \langle v^2 \rangle$$

$\langle v^2 \rangle$: velocidade média quadrática

É necessária mais uma equação relacionando P(t) e ϵ(t).

Equação de estado $P = P(\epsilon)$

As substâncias relevantes em cosmologia possuem equações de estado que podem ser escritas numa forma linear simples.

$$P = w\epsilon \qquad (11)$$

w: adimensional

Exemplo 1:

Gás de baixa densidade, de partículas massivas não-relativísticas:

$$P_{\rm nonrel} = w\epsilon_{\rm nonrel}$$

$$w \approx= \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \ll 1$$

- Ar em temperatura ambiente:

$$\langle v^2 \rangle \sim 500 \text{ m s}^{-1} \Rightarrow w \sim 10^{-12}$$

- Nuvem de hidrogênio ionizado:

- elétrons são não-relativísticos se:

$$T \ll 6 \times 10^9 \text{ K}$$

- prótons são não-relativísticos se:

$$T \ll 10^{13} \text{ K}$$

É necessária mais uma equação relacionando P(t) e ϵ(t).

Equação de estado $P = P(\epsilon)$

As substâncias relevantes em cosmologia possuem equações de estado que podem ser escritas numa forma linear simples.

$$P = w\epsilon \qquad (11)$$

w: adimensional

Exemplo 2:

Gás de fótons (partículas sem massa), relativísticas:

$$P_{\rm rel} = \frac{1}{3}\epsilon_{\rm rel}$$

É necessária mais uma equação relacionando P(t) e ϵ(t).

Equação de estado

$$P = P(\epsilon)$$

As substâncias relevantes em cosmologia possuem equações de estado que podem ser escritas numa forma linear simples.

$$P = w\epsilon \qquad (11)$$

w: adimensional

Exemplo 2:

Gás de fótons (partículas sem massa), relativísticas:

$$P_{\rm rel} = \frac{1}{3}\epsilon_{\rm rel}$$

Exemplo 3:

Gás de partículas massivas altamente relativísticas:

$$\langle v^2 \rangle \sim c^2$$

$$w = \frac{1}{3}$$

É necessária mais uma equação relacionando P(t) e ϵ(t).

Equação de estado

$$P = P(\epsilon)$$

As substâncias relevantes em cosmologia possuem equações de estado que podem ser escritas numa forma linear simples.

$$P = w\epsilon \qquad (11)$$

w: adimensional

Exemplo 2:

Gás de fótons (partículas sem massa), relativísticas:

$$P_{\rm rel} = \frac{1}{3}\epsilon_{\rm rel}$$

Exemplo 3:

Gás de partículas massivas altamente relativísticas:

$$\langle v^2 \rangle \sim c^2$$
$$w = \frac{1}{3}$$

Exemplo 4:

Gás de partículas massivas com:

$$0 < \langle v^2 \rangle < c^2$$
$$0 < w < \frac{1}{3}$$

$$P = w\epsilon \qquad (11)$$

Valores de w de interesse:

$w < -\frac{1}{3}$

"energia escura"

$\ddot{a} > 0$

Partículas não-relativísticas massivas

$w = 0$

"matéria"

Fótons e partículas relativísticas sem massa

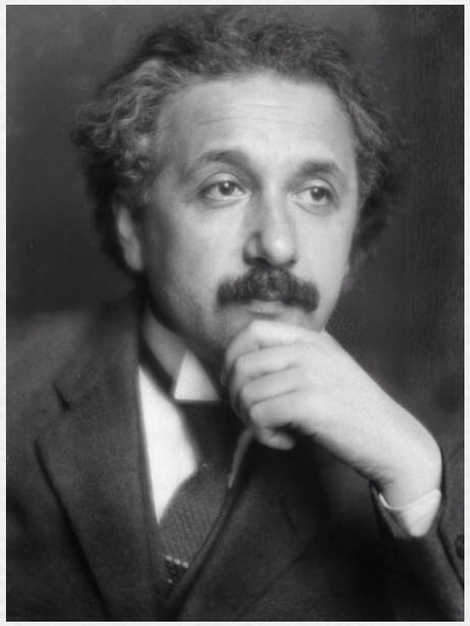
$w = \frac{1}{3}$

"radiação"

Λ **"constante cosmológica"**

$w = -1$

4.5 A Constante Cosmológica



Após seu primeiro artigo sobre a RG em 1915, evidências incompletas, disponíveis na época, levaram Einstein a conceber nosso Universo como sendo **estático** (sem expandir ou contrair), com densidade de energia positiva mas pressão negligenciável.

Pode um universo contendo essencialmente apenas matéria não-relativística ser estático?

Não.

https://thecuriousastronomer.files.wordpress.com/2014/12/img_3316.jpg

Este fato pode ser ilustrado no contexto Newtoniano.

Equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})$$

Este fato pode ser ilustrado no contexto Newtoniano.

Equação de Poisson:

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r})$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi(\vec{r})$$

Num universo permanentemente estático, a aceleração precisa ser nula em todos os pontos, o que implica que o potencial gravitacional é constante.

$\Phi =$ constante

$$\rho = \frac{1}{4\pi G}\nabla^2\Phi = 0$$

Universo vazio

Solução de Einstein, em termos Newtonianos:

$$\nabla^2\Phi + \Lambda = 4\pi G\rho$$

"constante cosmológica"

Universo permanentemente estático para:

$$\Lambda = 4\pi G\rho$$

Solução de Einstein, em termos Newtonianos:

$$\nabla^2\Phi + \Lambda = 4\pi G\rho$$

"constante cosmológica"

Universo permanentemente estático para:

$$\Lambda = 4\pi G\rho$$

Solução de Einstein, em termos da RG:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2}$$

Eq. de Friedmann em forma relativística (2)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Eq. de Friedmann em forma relativística com a constante cosmológica (12)

Solução de Einstein (1917), em termos da RG:

Eq. de Friedmann em forma relativística com a constante cosmológica

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{12}$$

Equação de fluido (não é afetada)

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \tag{9}$$

Equação de aceleração com a constante cosmológica

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \tag{13}$$

Solução de Einstein (1917), em termos da RG:

Eq. de Friedmann em forma relativística com a constante cosmológica

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3} \qquad (12)$$

Equivalente à adicionar uma nova componente no universo, com densidade de energia dada por:

$$\epsilon_\Lambda \equiv \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda$$

$$\Lambda = \text{constante} \Rightarrow \epsilon_\Lambda = \text{constante}$$

Solução de Einstein (1917), em termos da RG:

Equação de fluido
(não é afetada)

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \tag{9}$$

$$\epsilon_\Lambda = \text{constante} \Rightarrow P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda = -\frac{c^2}{8\pi G}\Lambda$$

Eq. de Friedmann em forma relativística com a constante cosmológica

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{12}$$

Equação de aceleração com a constante cosmológica

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \tag{13}$$

Universo estático: $\dot{a} = 0$ e $\ddot{a} = 0$

Eq. de Friedmann em forma relativística com a constante cosmológica

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3} \qquad (12)$$

Equação de aceleração com a constante cosmológica

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \qquad (13)$$

Universo estático: $\dot{a} = 0$ e $\ddot{a} = 0$

Para um universo com densidade de matéria ρ e constante cosmológica, a eq. (13) se reduz à:

$$0 = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \longrightarrow \Lambda = 4\pi G\rho$$

(igual ao caso Newtoniano)

Eq. de Friedmann em forma relativística com a constante cosmológica

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3} \qquad (12)$$

Equação de aceleração com a constante cosmológica

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \qquad (13)$$

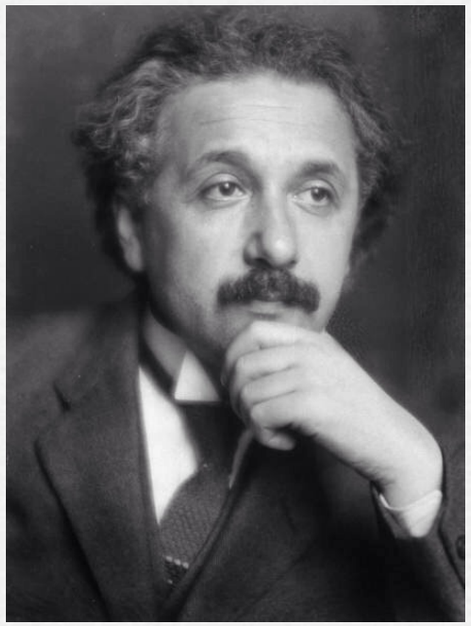
Universo estático: $\dot{a} = 0$ e $\ddot{a} = 0$

Para um universo com densidade de matéria ρ e constante cosmológica, a eq. (12) se reduz à:

$$0 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} + \frac{\Lambda}{3} \longrightarrow \Lambda = 4\pi G\rho \longrightarrow 0 = \frac{4\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \longrightarrow R_0 = \frac{c}{(4\pi G\rho)^{1/2}} = \frac{c}{\Lambda^{1/2}}$$

Esse modelo exige que k = +1 (positivamente curvo)

4.5 A Constante Cosmológica



Einstein não estava satisfeito com a constante cosmológica.

Modelo estático de Einstein apresenta **equilíbrio instável**.



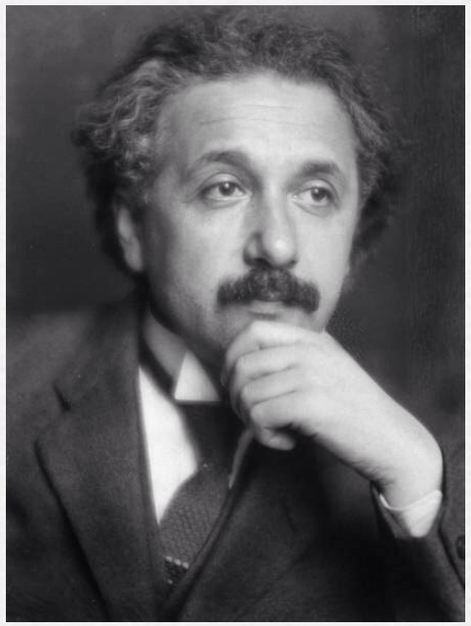
1929: Evidência observacional do universo em expansão (lei de Hubble)

Subestimou a distância das galáxias, logo superestimou H_0:

Einstein: "desculpa" para descartar a constante cosmológica

$$H_0 = 500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \Rightarrow H_0^{-1} = 2 \text{ Gyr}$$

4.5 A Constante Cosmológica

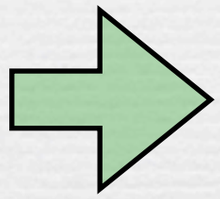


Einstein não estava satisfeito com a constante cosmológica.

Modelo estático de Einstein apresenta **equilíbrio instável**.



1929: Evidência observacional do universo em expansão (lei de Hubble)



Einstein: "desculpa" para descartar a constante cosmológica

Subestimou a distância das galáxias, logo superestimou H_0:

$$H_0 = 500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \Rightarrow H_0^{-1} = 2 \text{ Gyr}$$



Arthur Holmes
(1890 -1965)

Datação radiométrica:

$$T_{\text{Terra}} \sim 3 \text{ Gyr}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Holmes#/media/File:Arthurholmesin1912.jpg

$T_{\text{Terra}} \sim 3$ Gyr ? $H_0^{-1} \sim 2$ Gyr

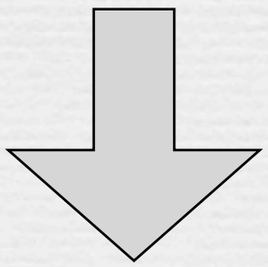
Alguns cosmólogos sugeriram que a constante cosmológica poderia explicar essa discrepância.

Se $\Lambda > 4\pi G\rho_0 \Rightarrow \ddot{a} > 0$ → O Universo pode ser arbitrariamente velho para um valor dado de H_0^{-1}.

Atualmente, a constante cosmológica é favorecida por uma série de observações (não mais relacionadas com uma discrepância entre o tempo de Hubble e a idade da Terra).

Qual o significado físico da constante cosmológica?

Precisamos identificar que componente do Universo teria uma densidade de energia que permanece constante com a expansão do Universo.



Energia do vácuo

Energia do vácuo

Física clássica: vácuo não contém energia ("nada").

Física quântica: criação e aniquilação de pares de partículas / antipartículas via o princípio da incerteza de Heisenberg.

constante de Planck

$$\Delta E \Delta t \leq h$$

Energia total do par

tempo de vida do par virtual

ϵ_{vac}

fenômeno quântico, independe do tempo ao longo da expansão / contração do Universo

Energia do vácuo

Ainda não se sabe exatamente como computá-la (teoria quântica de campos).

$$\epsilon_{\rm vac} \sim \frac{E_P}{\ell_P^3} \qquad \textbf{(???)}$$

$E_P = 1.22 \times 10^{28}$ eV

$\ell_P = 1.62 \times 10^{-35}$ m

$$\epsilon_{\rm vac} \sim 3 \times 10^{132}\ {\rm eV\ m^{-3}} \qquad \textbf{(!!!)}$$

A energia do vácuo assim calculada é 123 ordens de magnitude maior do que a densidade crítica atual do Universo.

$$\epsilon_{0,\rm crit} \sim 4870 \pm 290\ {\rm MeV\ m^{-3}}$$

Podemos tentar deduzir a densidade de energia de vácuo (constante cosmológica) a partir de observações em grandes escalas, o que nos fornece indiretamente informações sobre a estrutura do vácuo em escalas extremamente pequenas.

Fundamentos de Cosmologia

Aula 4

Concluída

AST-413-4 - INPE - 2020-3

Prof. Dr. Carlos Alexandre Wuensche
Prof. Dra. Christine Córdula Dantas