Fundamentos de Cosmologia

Aula 3

AST-413-4 - INPE - 2020-3

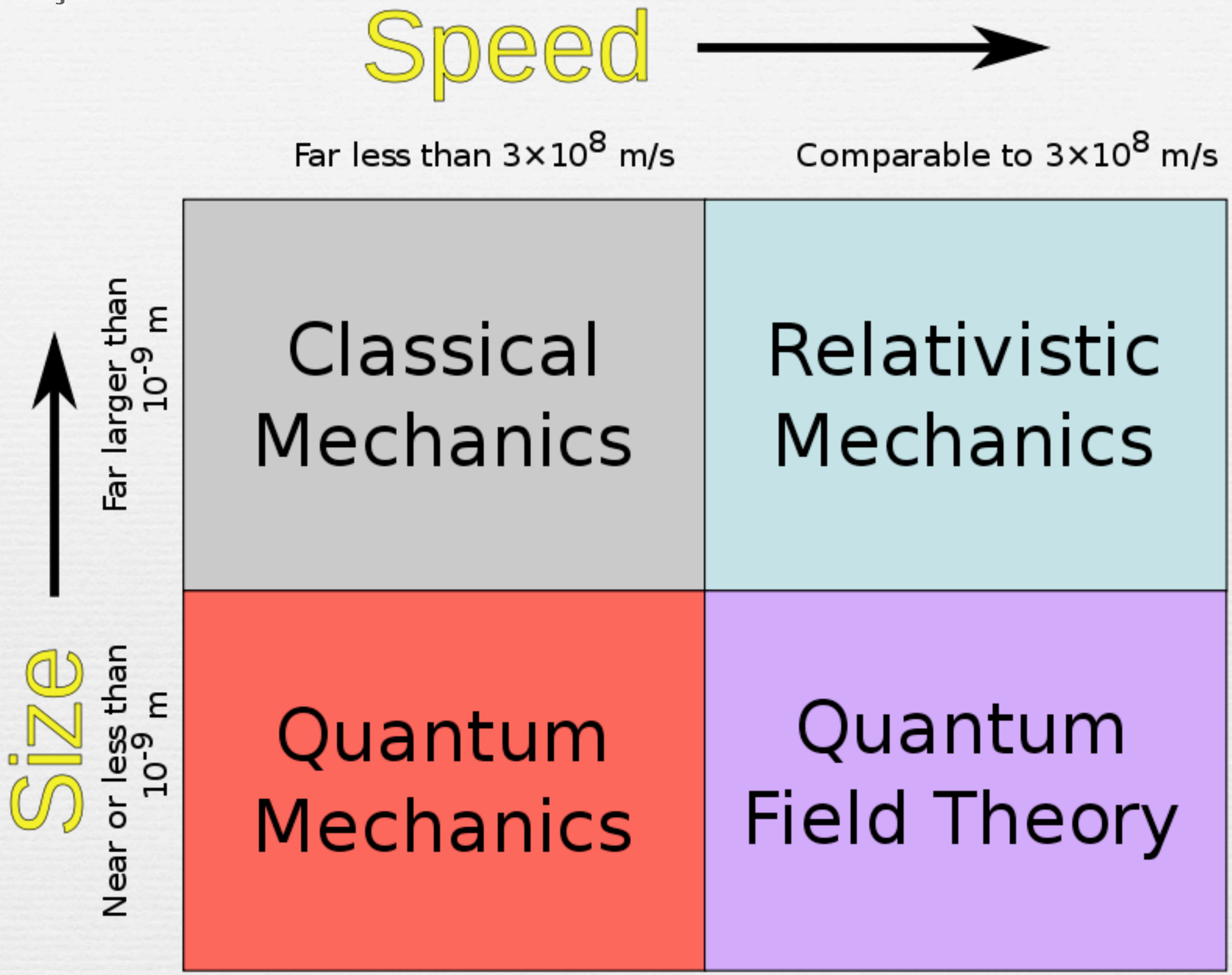
Prof. Dr. Carlos Alexandre Wuensche
Prof. Dra. Christine Córdula Dantas

3. Abordagens Newtoniana e Relativística

- 3.0 Introdução
- 3.1 Gravitação Newtoniana
- 3.2 Fundamentos da Relatividade Restrita
- 3.3 Fundamentos da Relatividade Geral
- 3.4 Conceitos de Métrica e Curvatura
- 3.5 Métrica de FLRW
- 3.6 Distância Própria

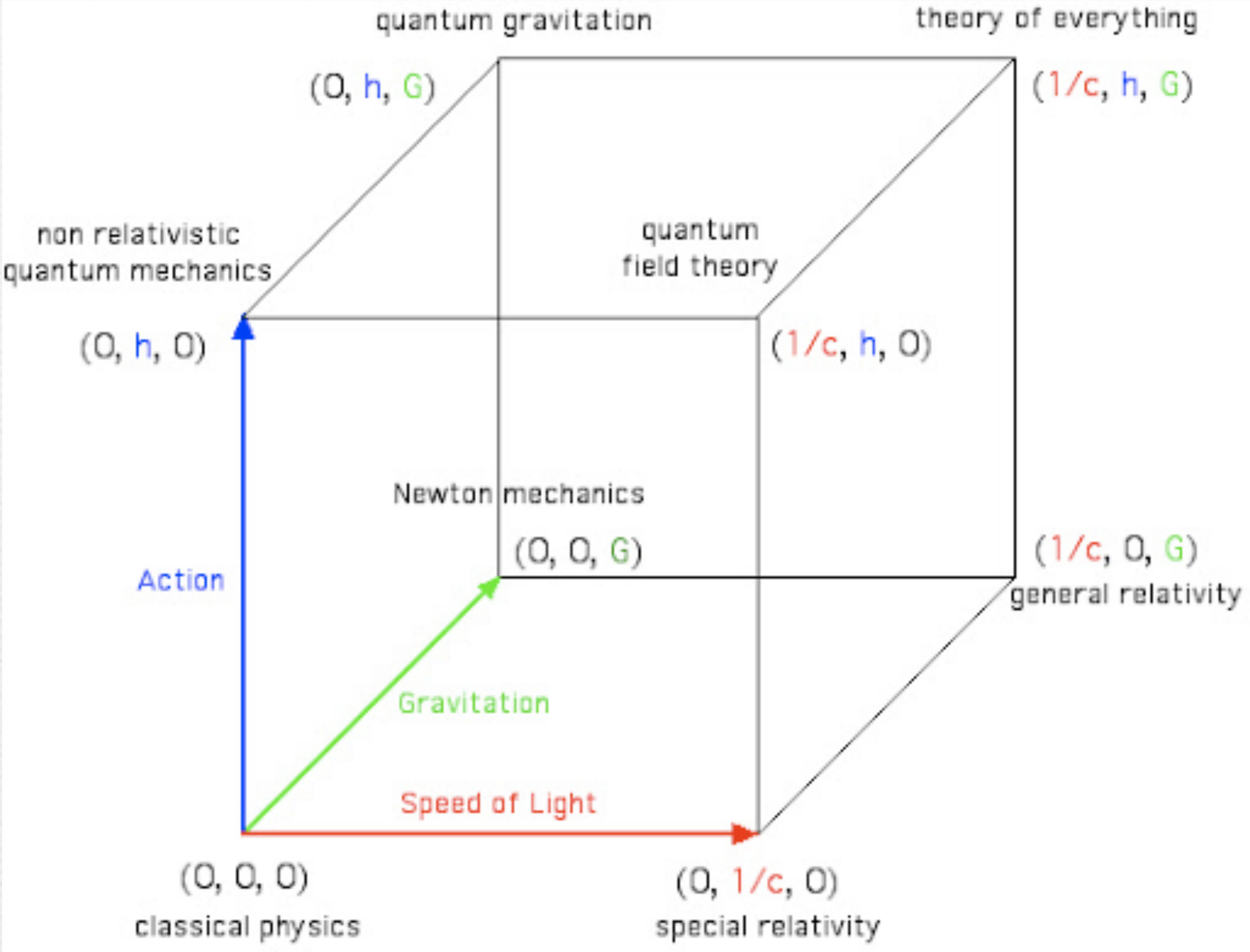
3.0 Introdução

Interação	Teoria atual	Mediadores	Intensidade relativa	Alcance [m]
Fraca	Teoria Eletro-fraca	Bósons W e Z	10^{25}	$\ell_{\mathrm{w}} \sim 10^{-18}$
Forte	Cromodinâ-mica quântica	Glúons	10^{38}	$\ell_{\mathrm{s}} \sim 10^{-15}$
Eletro-magnética	Eletrodinâ-mica quântica	Fótons	10^{36}	∞
Gravitacional	Relatividade Geral	Grávitons (hipotéticos)	1	∞



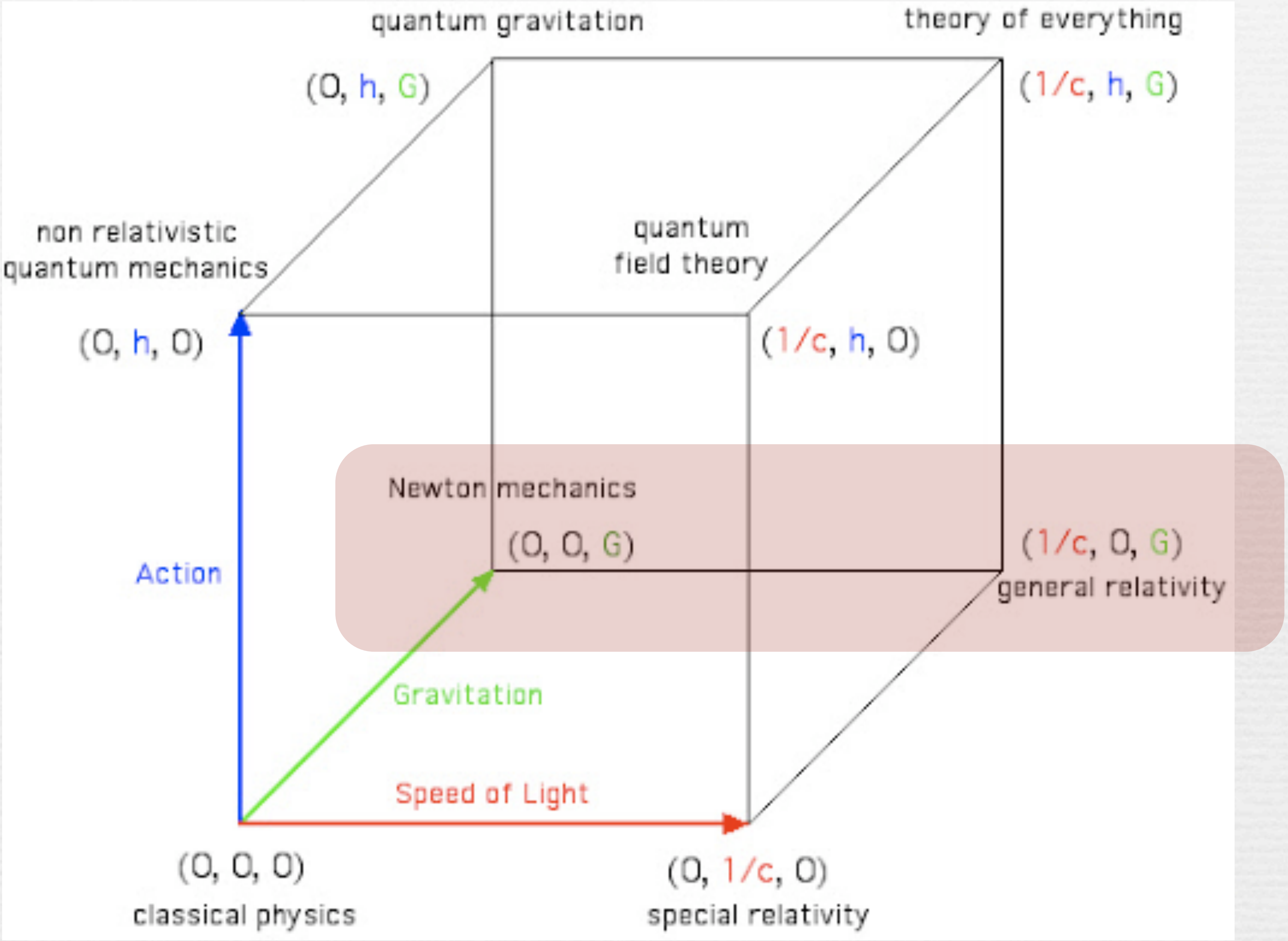
https://en.wikipedia.org/wiki/Classical_mechanics#/media/File:Physicsdomains.svg

O cubo de Bronshtein-Zelmanov-Okun



http://www.j-giesen.de/astro/NaturalUnits/planck.html

O cubo de Bronshtein-Zelmanov-Okun



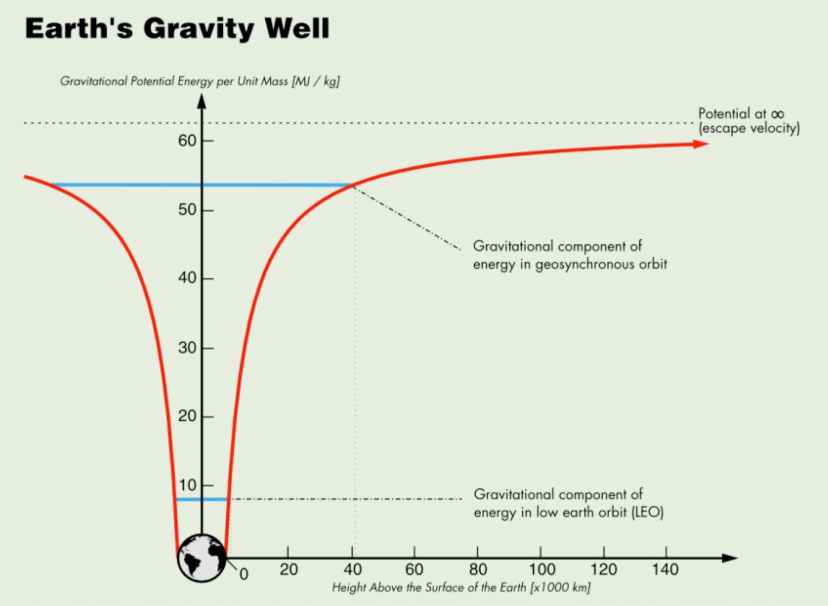
http://www.j-giesen.de/astro/NaturalUnits/planck.html

Gravitação Newtoniana

Gravitação é uma força que se propaga instantaneamente entre corpos materiais.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -m\nabla\Phi(\vec{r})$$



https://askeyphysics.org/2014/11/16/1110-1114-interstellar-rosetta-gravity-g-free-fall/gravitywell/

https://physics.stackexchange.com/questions/406104/what-does-spacetime-look-like-near-a-black-hole

Gravitação Newtoniana

Gravitação é uma força que se propaga instantaneamente entre corpos materiais.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

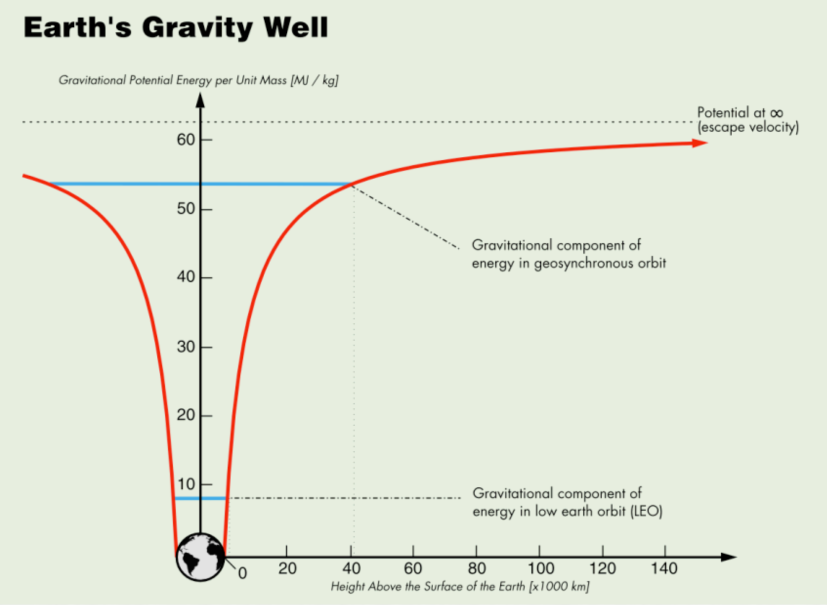
$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -m\nabla\Phi(\vec{r})$$

Relatividade Geral

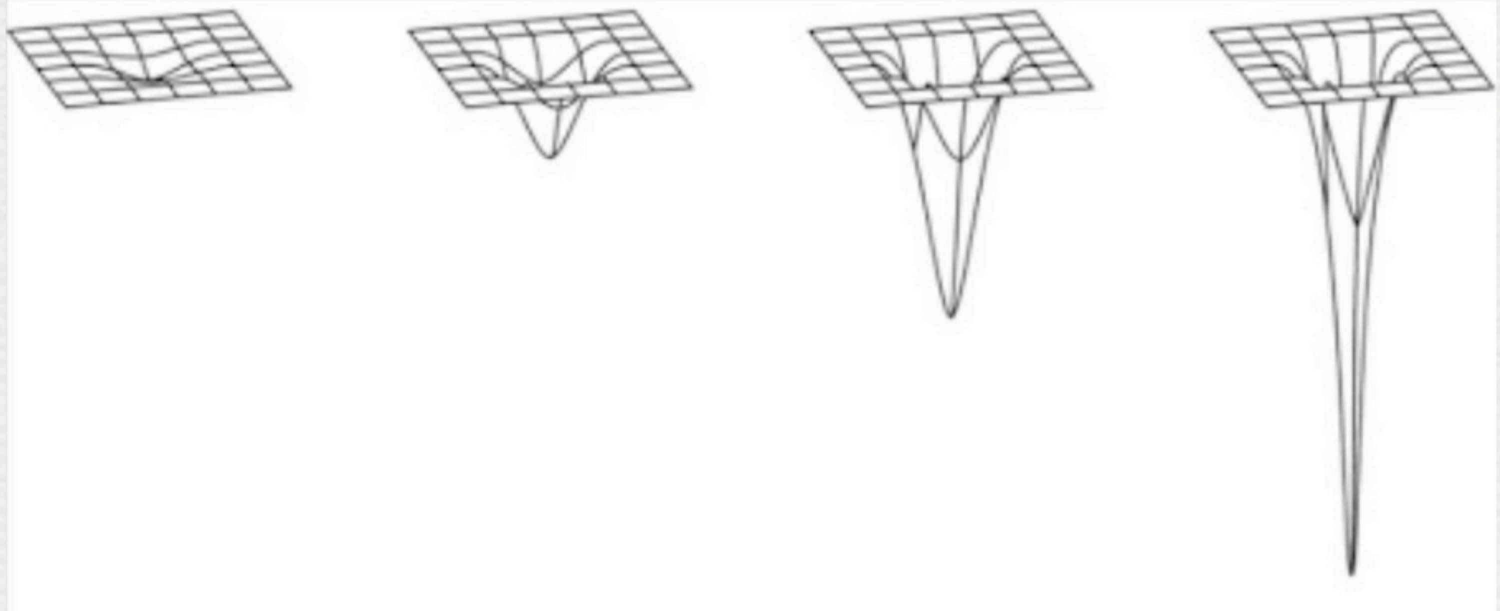
Gravitação é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Soluções admitem propagação de ondas do espaço-tempo.

Equação de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$



https://askeyphysics.org/2014/11/16/1110-1114-interstellar-rosetta-gravity-g-free-fall/gravitywell/



https://physics.stackexchange.com/questions/406104/what-does-spacetime-look-like-near-a-black-hole

Gravitação Newtoniana

Gravitação é uma força que se propaga instantaneamente entre corpos materiais.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -m\nabla\Phi(\vec{r})$$

Válida no limite de baixos valores de potencial $|\Phi|$; inválida para $|\Phi| \to \infty$.

Relatividade Geral

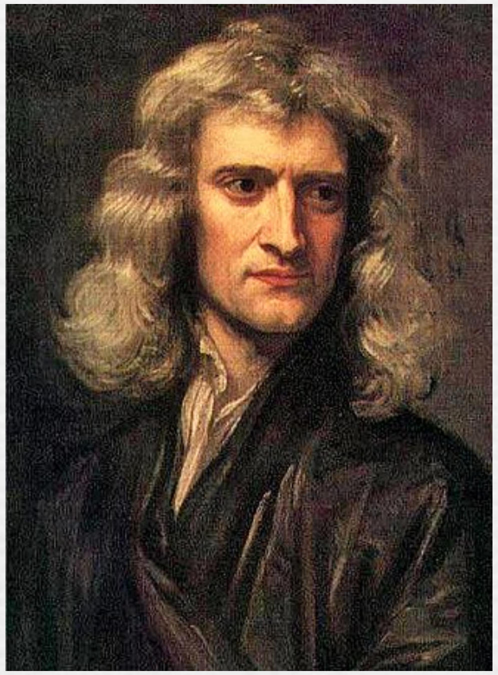
Gravitação é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Soluções admitem propagação de ondas do espaço-tempo.

Equação de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Teoria mais correta da gravitação, válida tanto para os limites de alta como de baixa curvatura do espaço-tempo, concordando com a previsão Newtoniana (no limite clássico, i.e., baixa curvatura).

3.1 Gravitação Newtoniana



Isaac Newton (1642-1727)

Espaço e tempo absolutos.

Espaço é Euclideano ("plano"), obedecendo aos axiomas e teoremas da geometria de Euclides.

Todo objeto no Universo possui uma propriedade, dita "massa inercial" e outra propriedade, dita "massa gravitacional".

Euclides (fl. 300 A.C.)

2a. Lei de Newton:

$$F = m_{\rm i} a$$

Força gravitacional:

$$F = -\frac{G M_{\rm g} m_{\rm g}}{r^2}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton#/media/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg

https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid#/media/File:Euklid-von-Alexandria_1.jpg

$$a = -\frac{GM_{\mathrm{g},\oplus}}{r_\oplus^2}\left(\frac{m_\mathrm{g}}{m_\mathrm{i}}\right)$$

2a. Lei de Newton:

$$F = m_\mathrm{i} a$$

Força gravitacional:

$$F = -\frac{GM_\mathrm{g} m_\mathrm{g}}{r^2}$$

https://pt.wikipedia.org/wiki/Galileu_Galilei#/media/
Ficheiro:Justus_Sustermans_-_Portrait_of_Galileo_Galilei,_1636.jpg

Galileu Galilei (1564-1642)

1

$$a = -\frac{GM_{\mathrm{g},\oplus}}{r_\oplus^2}\left(\frac{m_\mathrm{g}}{m_\mathrm{i}}\right)$$

2a. Lei de Newton:

$$F = m_\mathrm{i} a$$

Força gravitacional:

$$F = -\frac{GM_\mathrm{g} m_\mathrm{g}}{r^2}$$

https://pt.wikipedia.org/wiki/Galileu_Galilei#/media/Ficheiro:Justus_Sustermans_-_Portrait_of_Galileo_Galilei,_1636.jpg

Galileu Galilei (1564-1642)

Magnitude da aceleração gravitacional nas proximidades da superfície da Terra

$$a = -\overbrace{\frac{GM_{\mathrm{g},\oplus}}{r_\oplus^2}}^{9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}}}\left(\frac{m_\mathrm{g}}{m_\mathrm{i}}\right)$$

Estimativas atuais

$$1 \longleftarrow 1 \text{ em } 10^{13}$$

$$m = m_\mathrm{i} = m_\mathrm{g}$$

2a. Lei de Newton:

$$F = m_\mathrm{i} a$$

$\Longleftrightarrow$

Força gravitacional:

$$F = -\frac{GM_\mathrm{g} m_\mathrm{g}}{r^2}$$

Princípio da Equivalência:

$$m = m_{\mathrm{i}} = m_{\mathrm{g}}$$

Em cada ponto do espaço, existe uma aceleração univocamente determinada.

$$\vec{r} \longmapsto \vec{a}(\vec{r})$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi(\vec{r})$$

Princípio da Equivalência:

$$m = m_{\mathrm{i}} = m_{\mathrm{g}}$$

Em cada ponto do espaço, existe uma aceleração univocamente determinada.

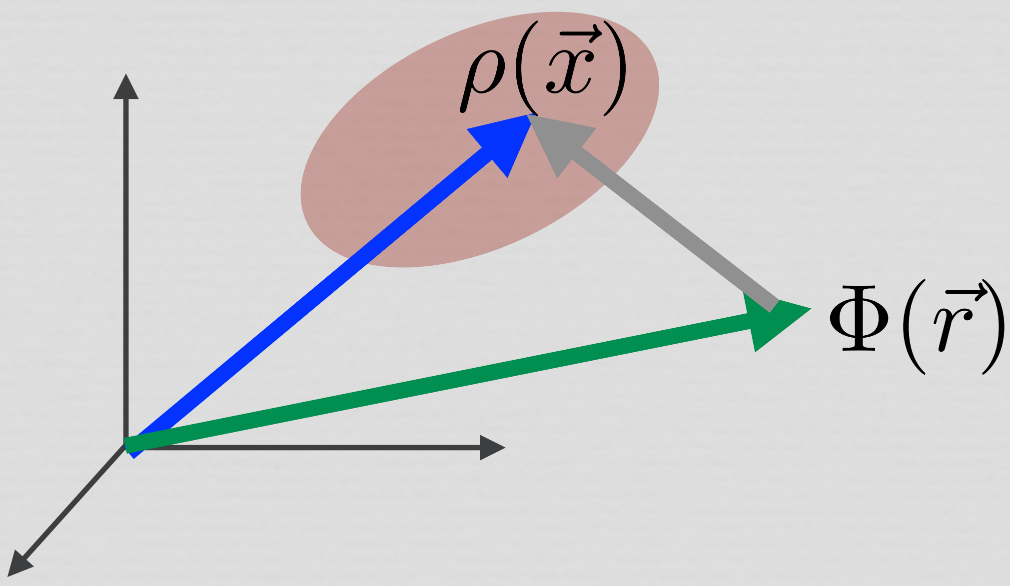
$$\vec{r} \longmapsto \vec{a}(\vec{r})$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi(\vec{r})$$

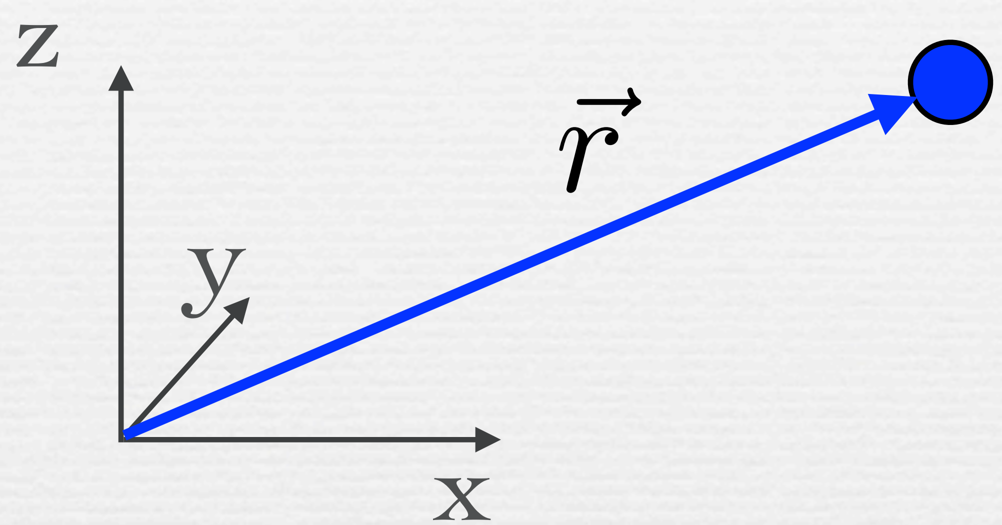
Equação de Poisson:

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r})$$

$$\Phi(\vec{r}) = -G\int \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{r}|}d^3x$$

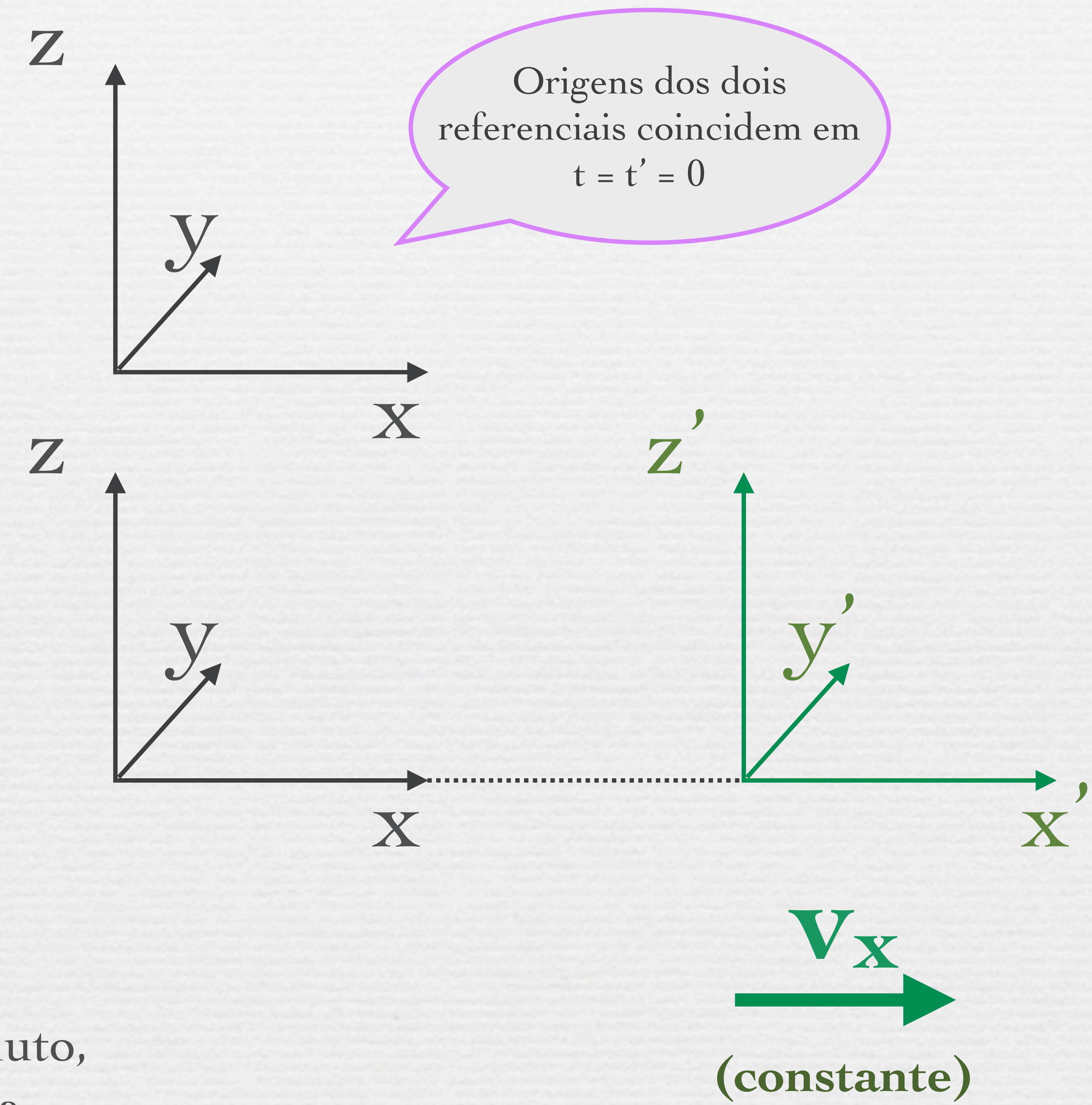


Transformação Galileana entre referenciais inerciais:



$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Transformação Galileana entre referenciais inerciais:



$$
\begin{aligned}
x' &= x - v_x t \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

"Tempo absoluto, flui por sua própria natureza sem relação com nada externo"

3.2 Fundamentos da Relatividade Restrita

Albert Einstein (1879-1955)

Einstein (1905): Relatividade Restrita (RR)
Einstein (1915): Relatividade Geral (RG)

RR: "*On the Electrodynamics of Moving Bodies*":

- Incompatibilidade da mecânica com as equações de Maxwell;
- Resultado nulo do experimento de Michelson-Morley (inexistência do éter).

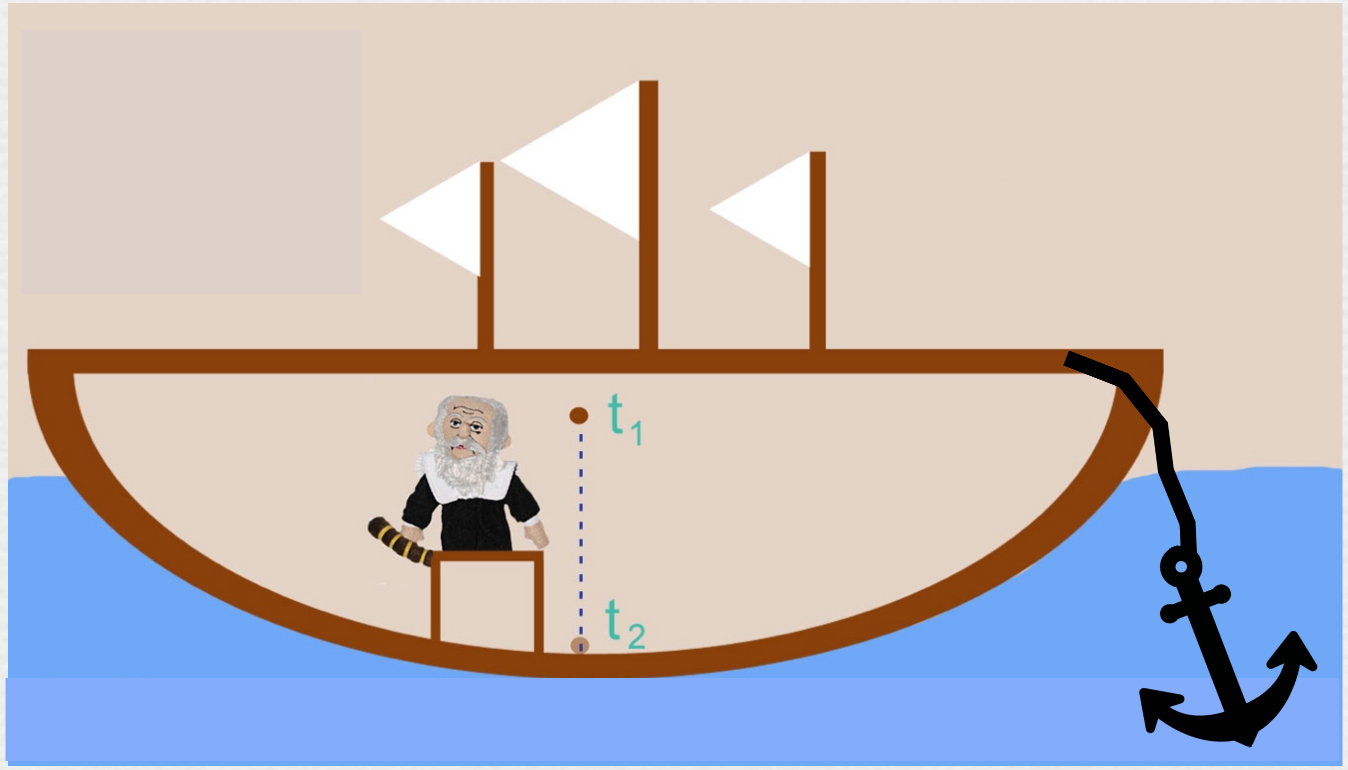
https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein#/media/File:Einstein_patentoffice.jpg

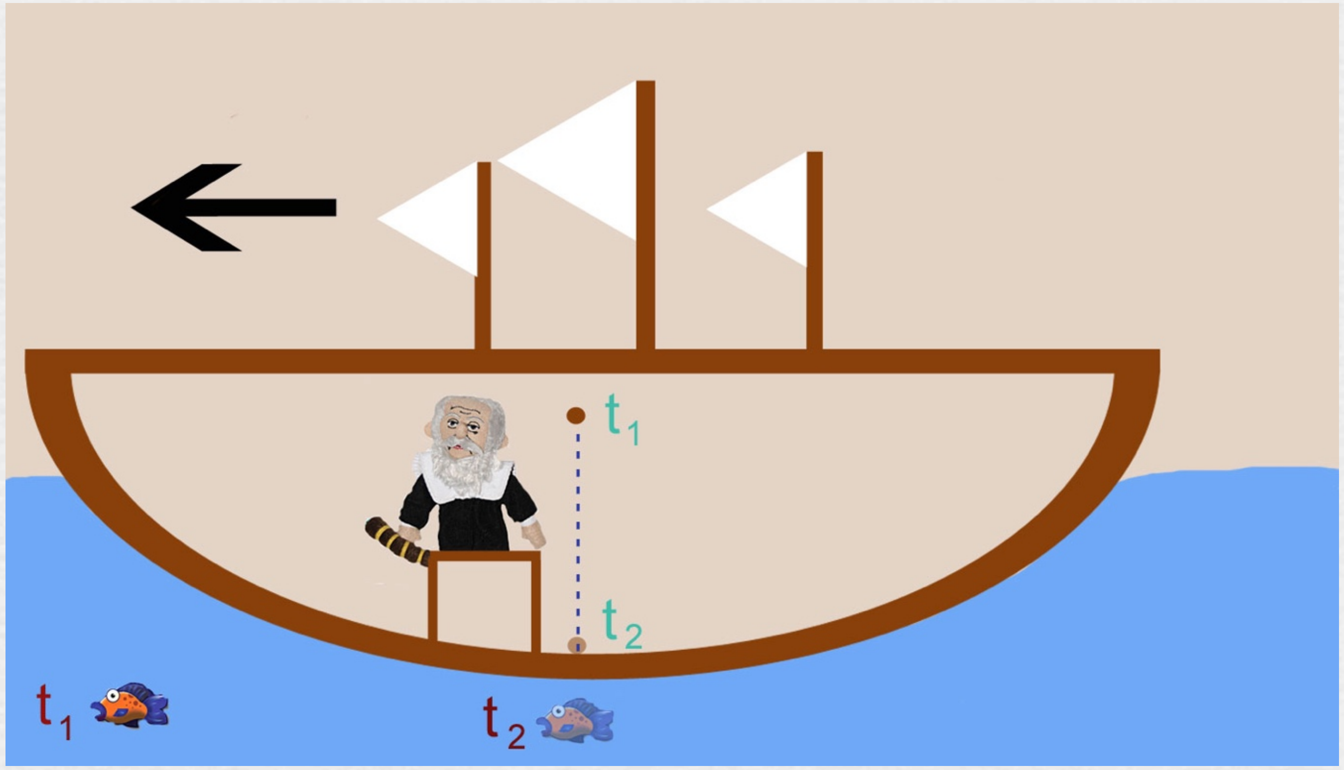
RR: correção da mecânica (sem a presença da gravitação), a partir de dois **postulados fundamentais**.

1) As equações que descrevem as leis básicas da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

RR: correção da mecânica (sem a presença da gravitação), a partir de dois **postulados fundamentais**.

1) As equações que descrevem as leis básicas da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

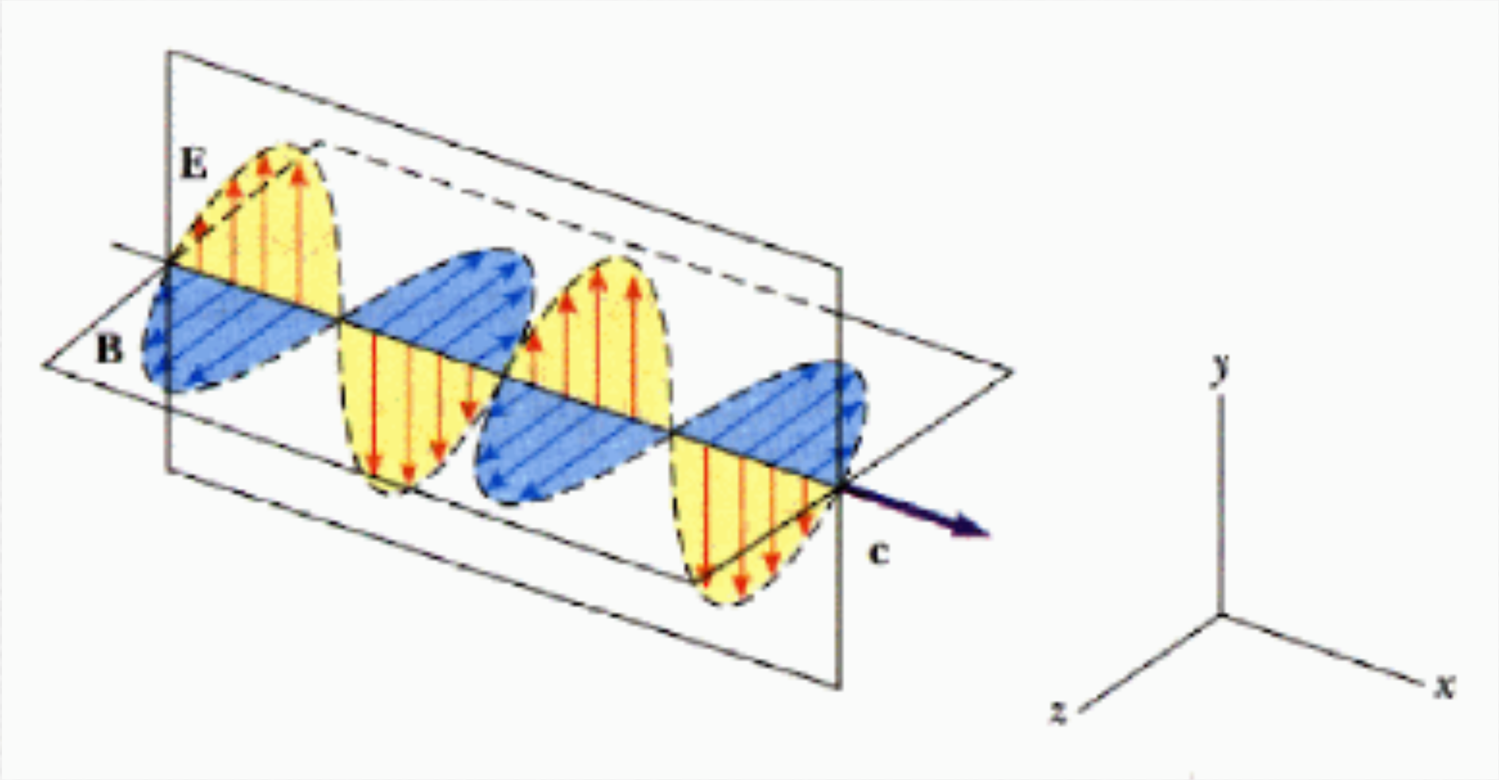




https://www.physicscentral.com/explore/plus/images/Galileo-s-Ship-large.jpg

RR: correção da mecânica (sem a presença da gravitação), a partir de dois **postulados fundamentais**.

1) As equações que descrevem as leis básicas da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.



Equações de Maxwell estabelecem a existência de ondas eletromagnéticas (OEM) se propagando com a velocidade da luz (**c**).

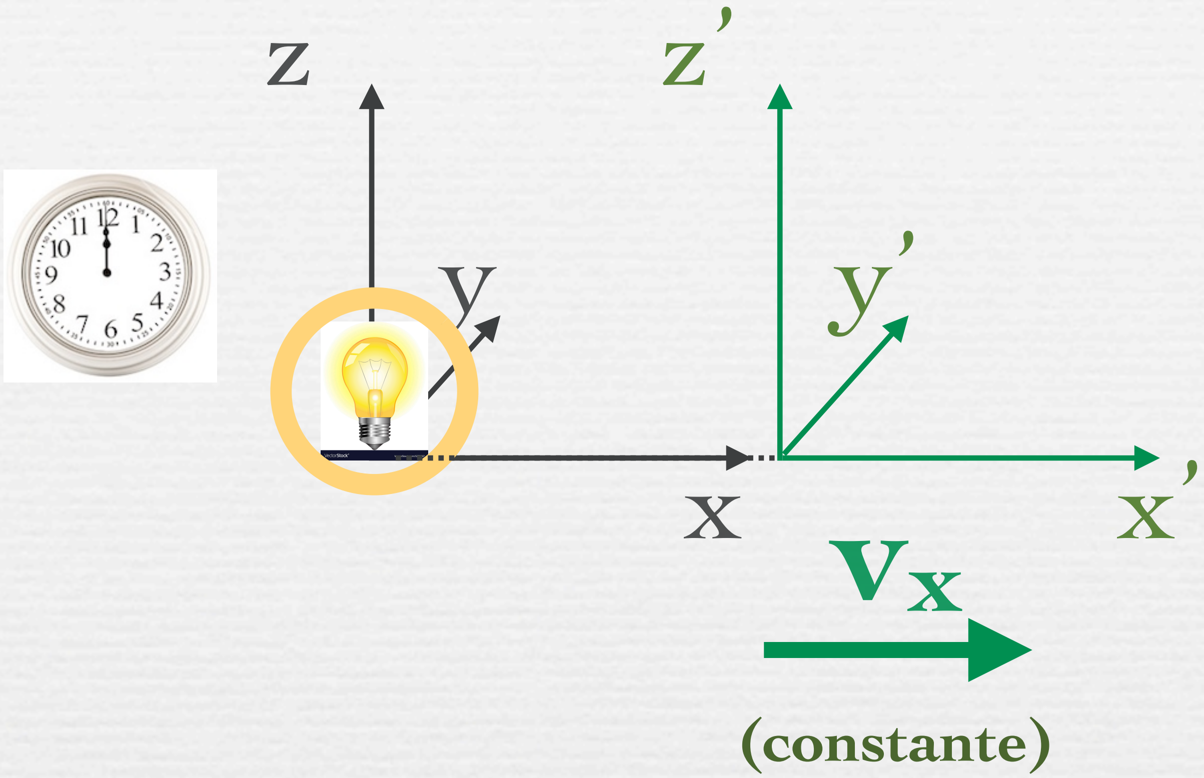
Se as Equações de Maxwell são idênticas em todos os referenciais inerciais, então as OEM viajam à velocidade **c** em todos os referenciais inerciais.

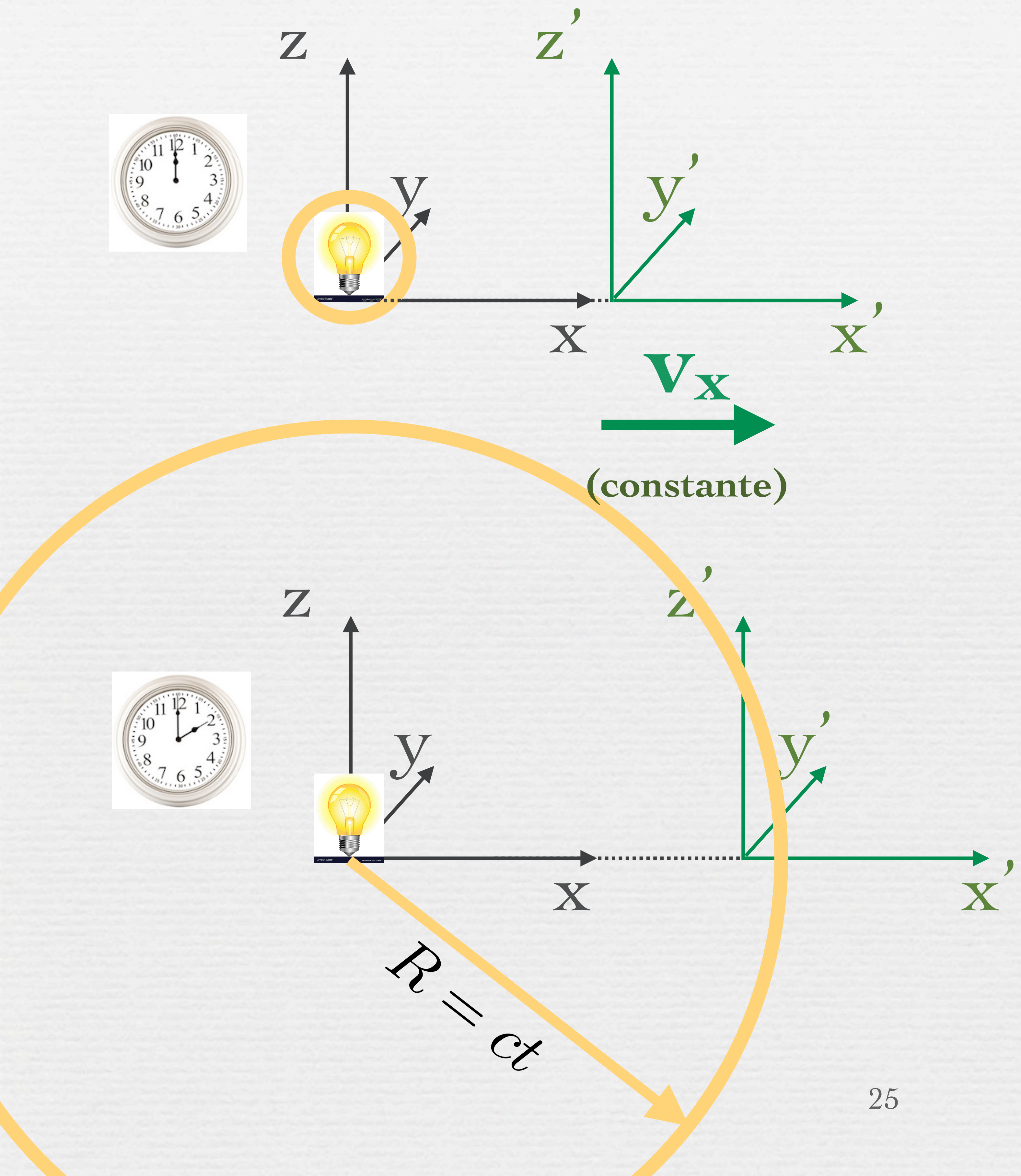
http://psi.phys.wits.ac.za/teaching/Connell/phys284/2005/lecture-01/lecture_01/node5.html

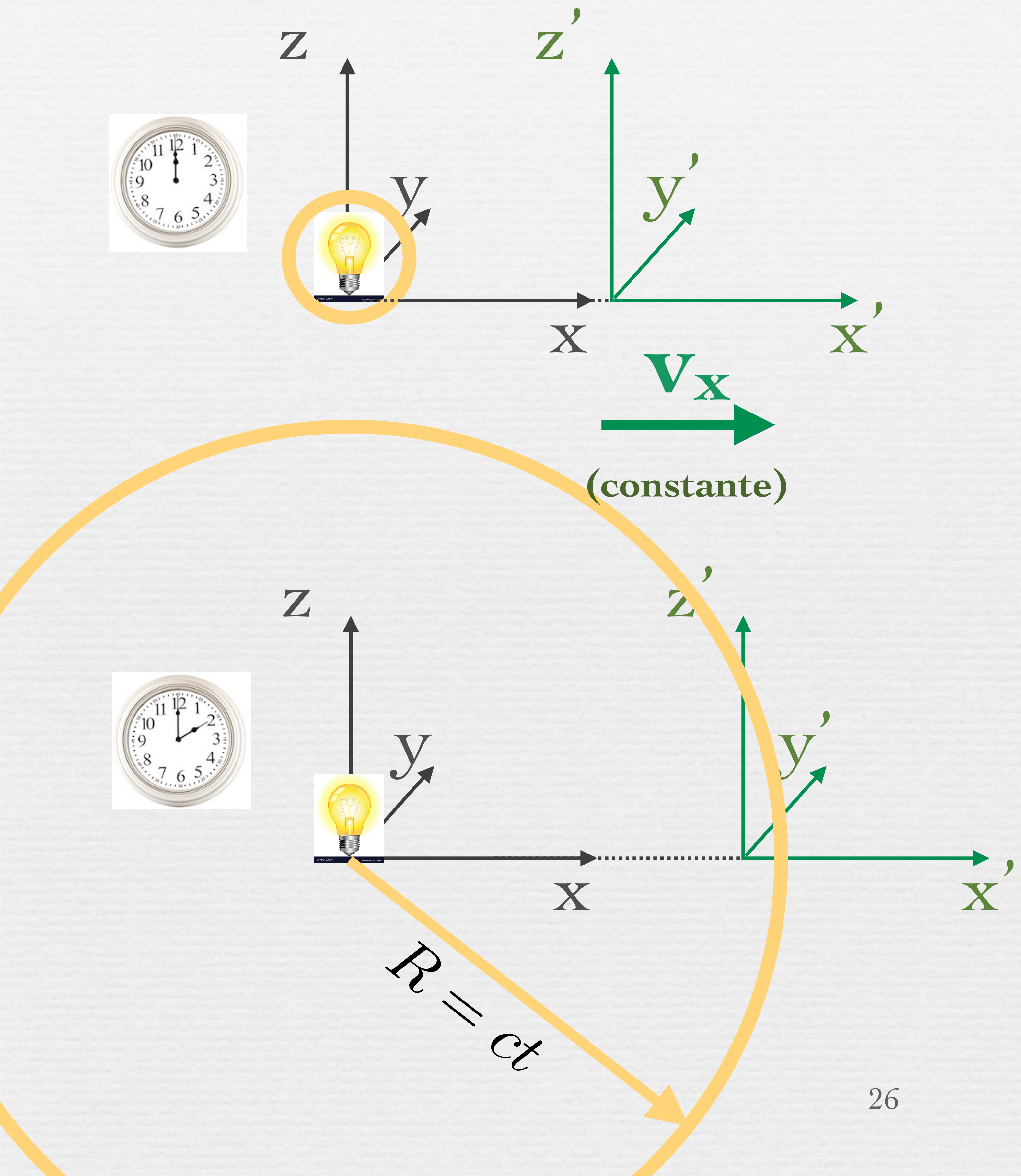
RR: correção da mecânica (sem a presença da gravitação), a partir de dois **postulados fundamentais**.

1) As equações que descrevem as leis básicas da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

2) A velocidade da luz no vácuo possui o mesmo valor (**c**) em todos os referenciais inerciais.

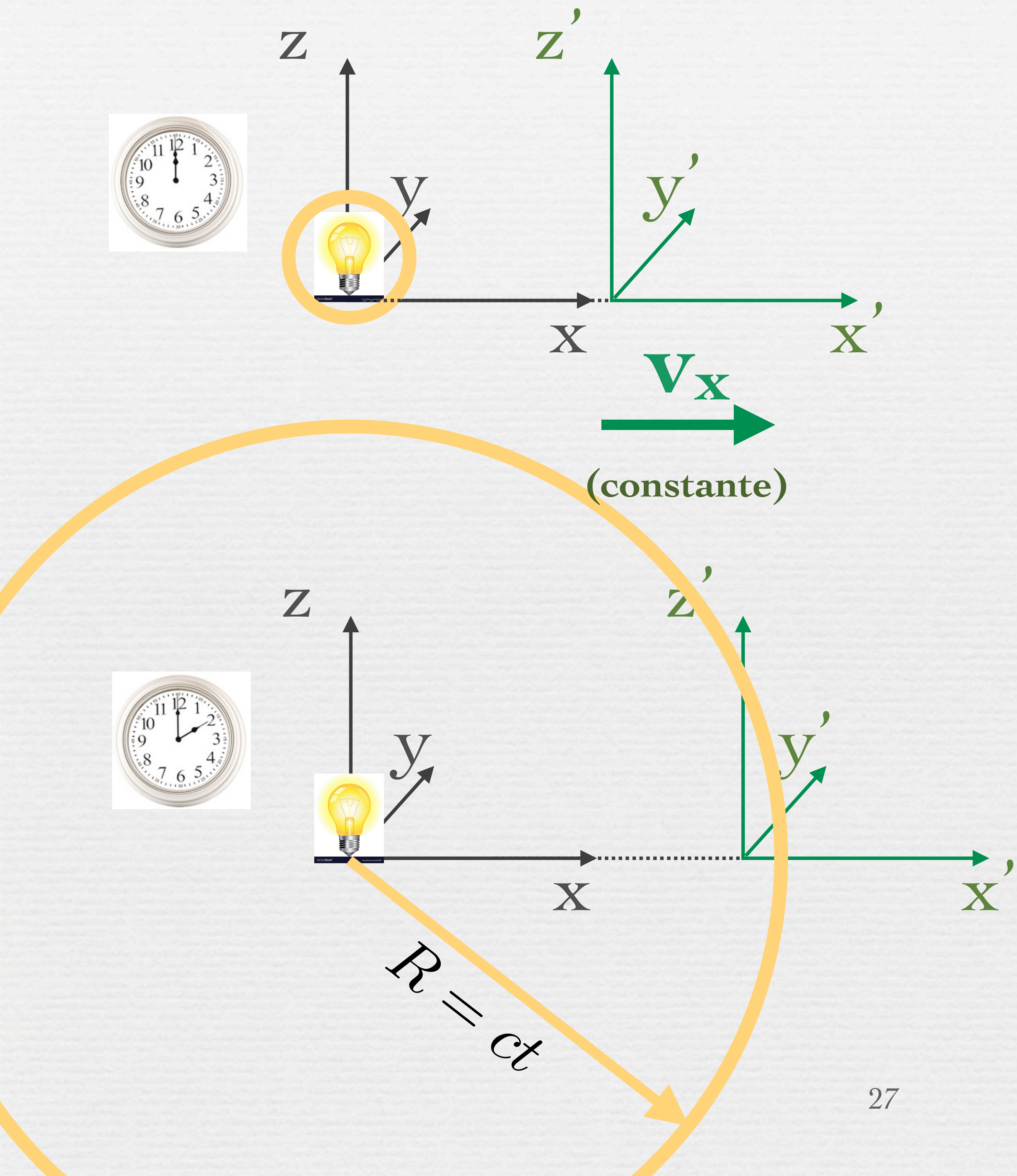

z
z'
y
y'
x
x'
v_x
(constante)


z
z'
y
y'
x
x'
v_x
(constante)
z
z'
y
y'
x
x'
$R = ct$



$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$c^2(t')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$$

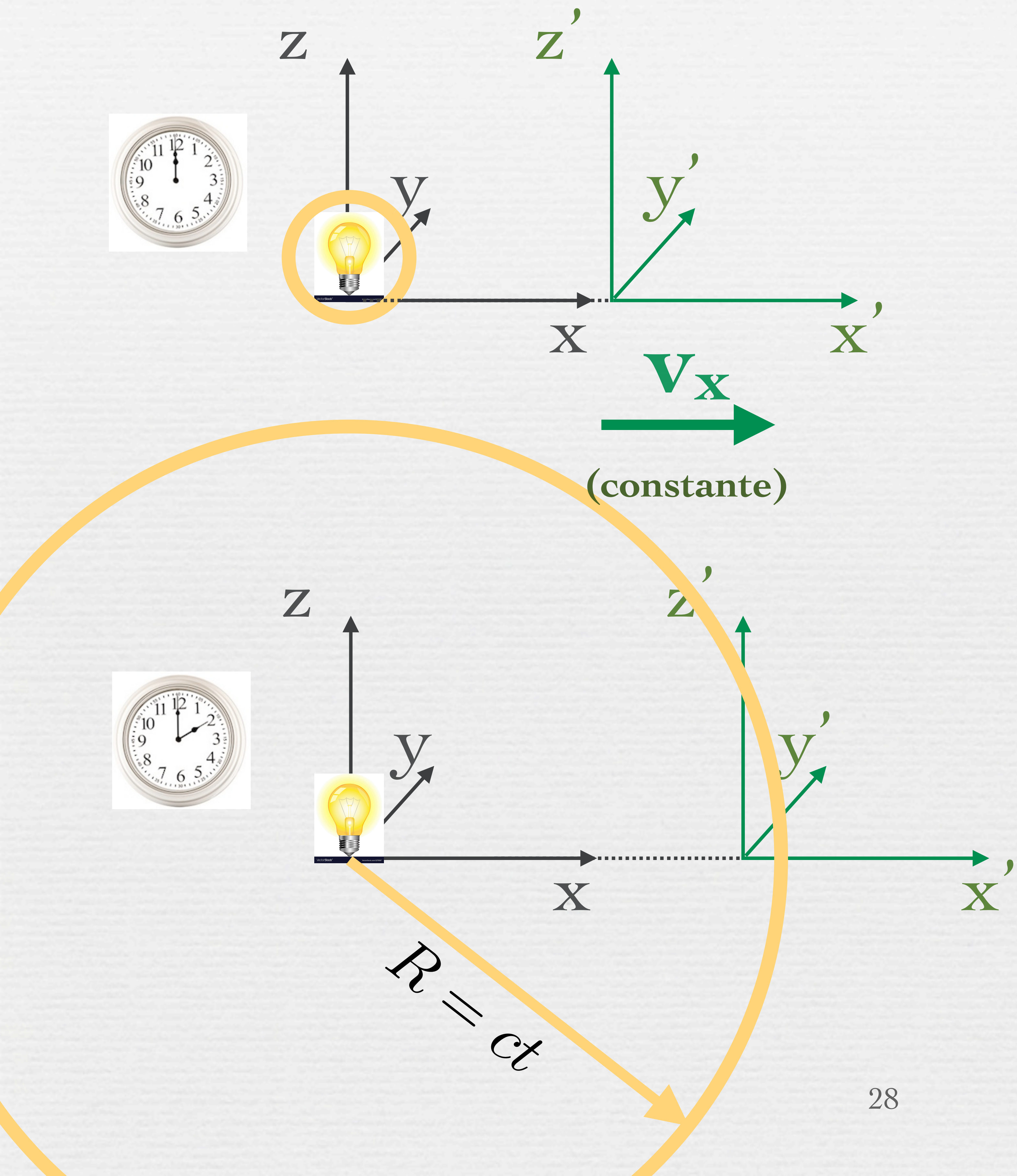


$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$c^2(t')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$$

Transformação Galileana:

$$\begin{aligned} x' &= x - v_x t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$



$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$c^2(t')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$$

Transformação Galileana:

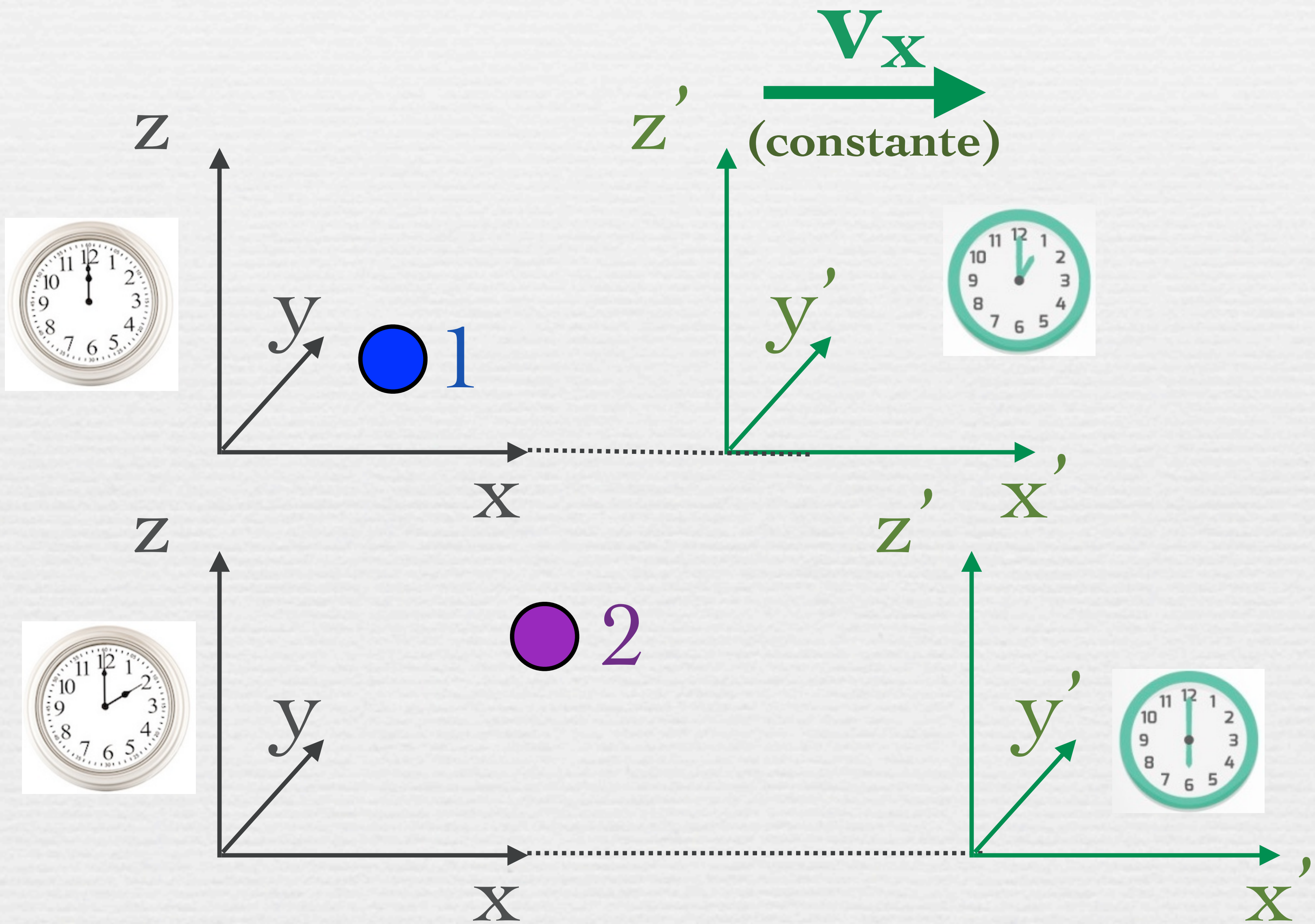
$$\begin{array}{rcl} x' & = & x - v_x t \\ y' & = & y \\ z' & = & z \\ t' & = & t \end{array}$$

Transformação de Lorentz:

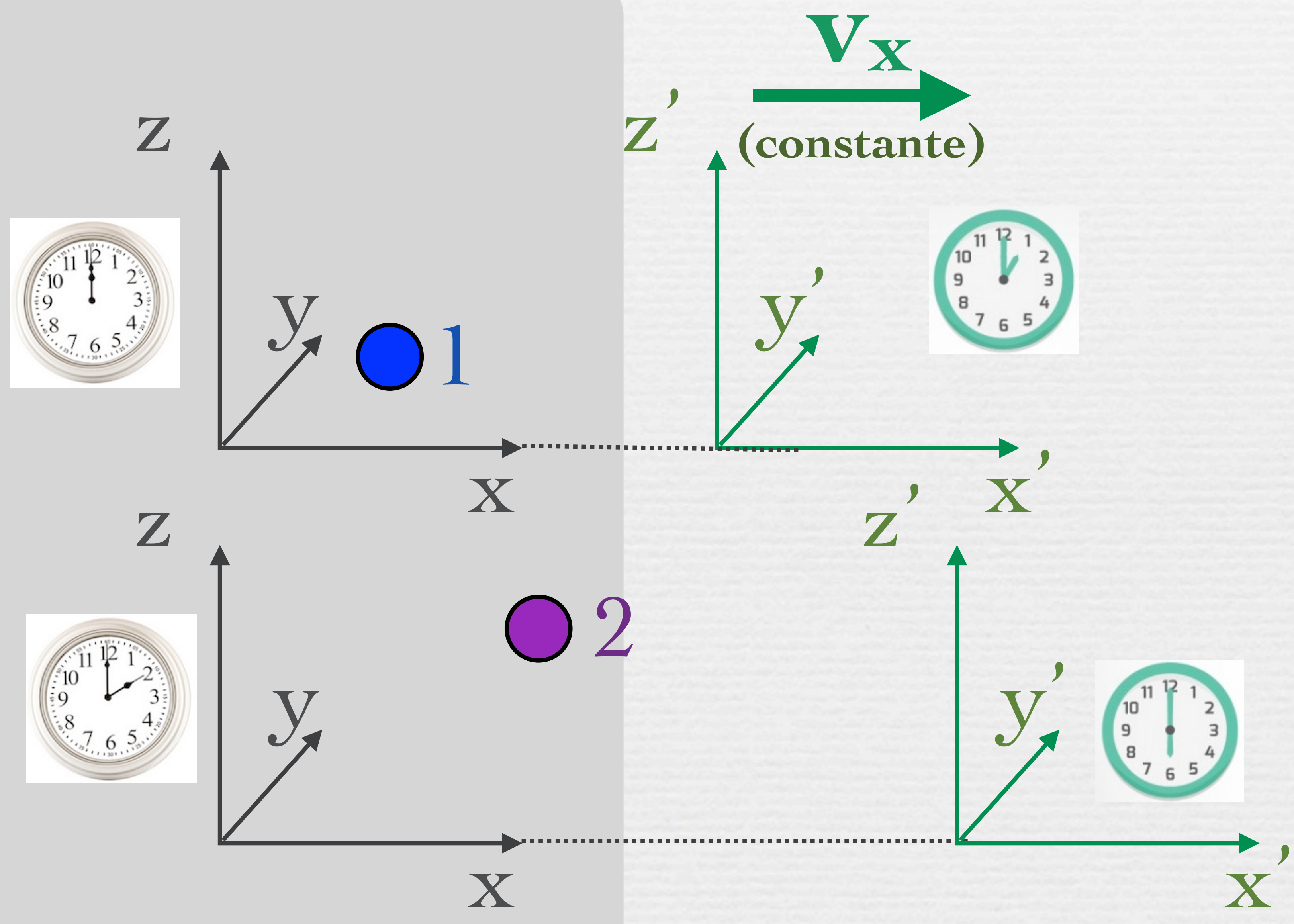
$$\begin{array}{rcl} x' & = & \gamma(x - v_x t) \\ y' & = & y \\ z' & = & z \\ t' & = & \gamma(t - v_x x/c^2) \end{array}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Como a Transformação de Lorentz da RR rompe as noções Newtonianas de espaço e de tempo?



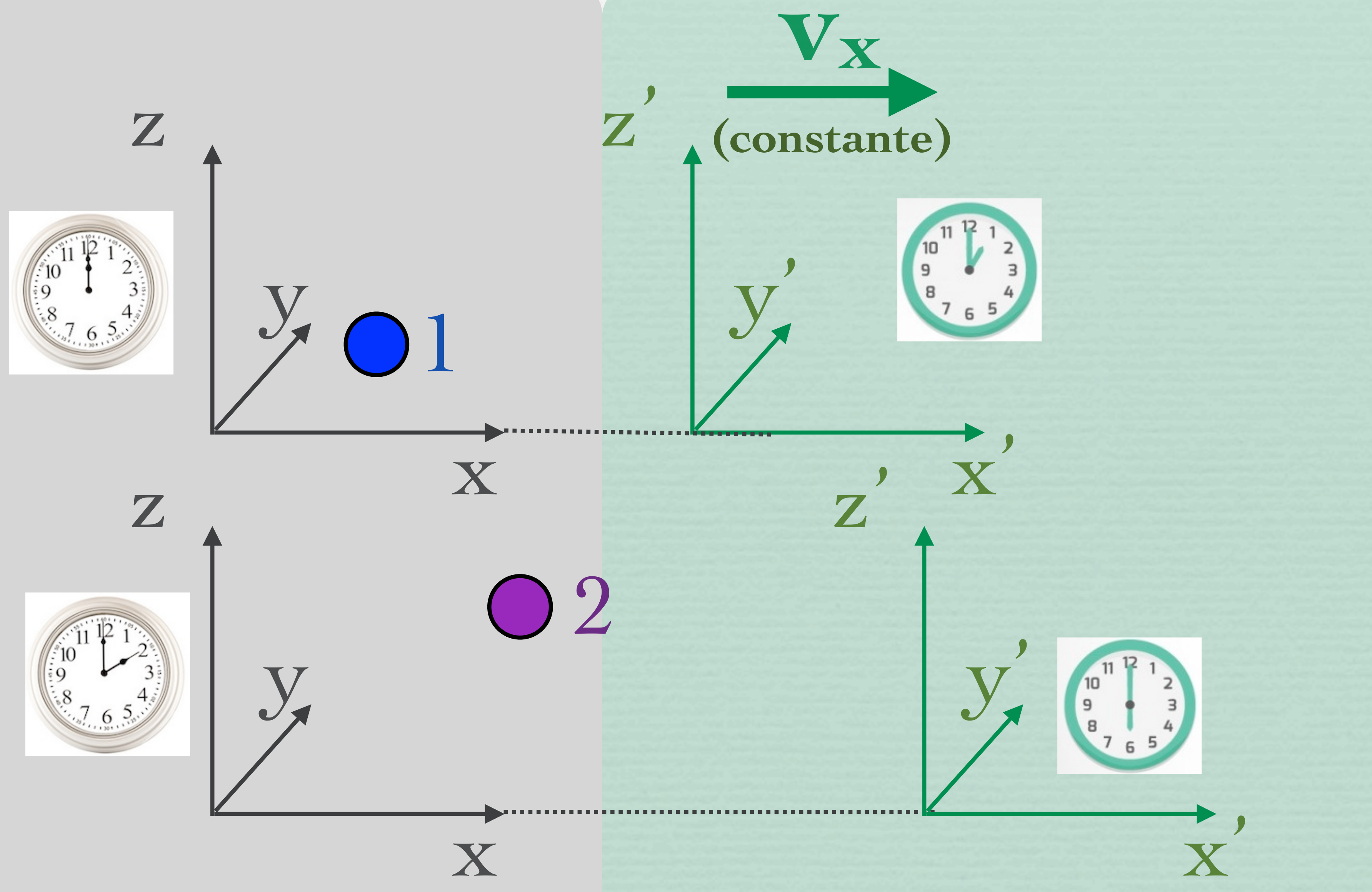
Como a Transformação de Lorentz da RR rompe as noções Newtonianas de espaço e de tempo?



$$(\Delta\ell)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Como a Transformação de Lorentz da RR rompe as noções Newtonianas de espaço e de tempo?



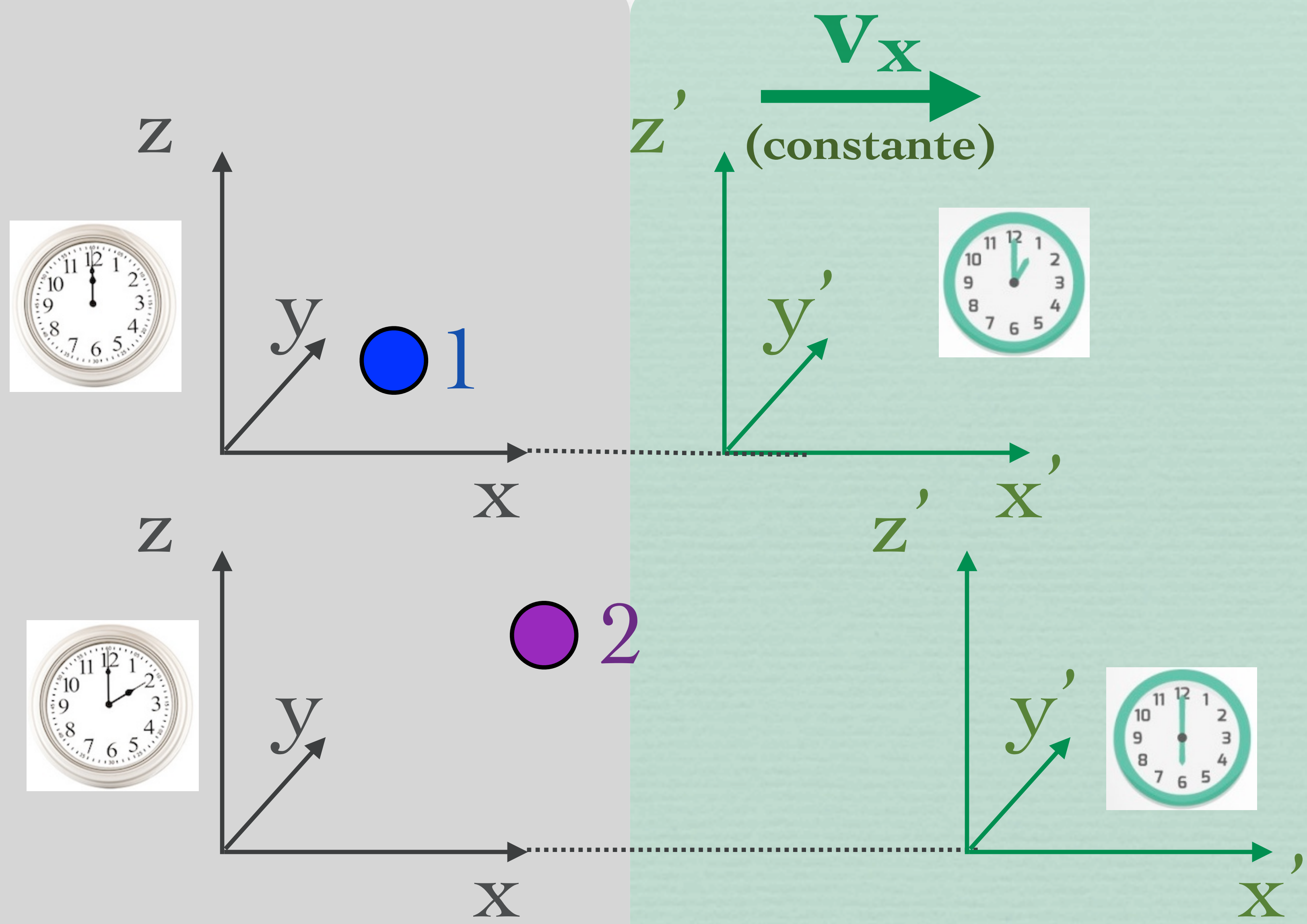
$$(\Delta\ell)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$(\Delta\ell')^2 = (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

Como a Transformação de Lorentz da RR rompe as noções Newtonianas de espaço e de tempo?



$$(\Delta\ell)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

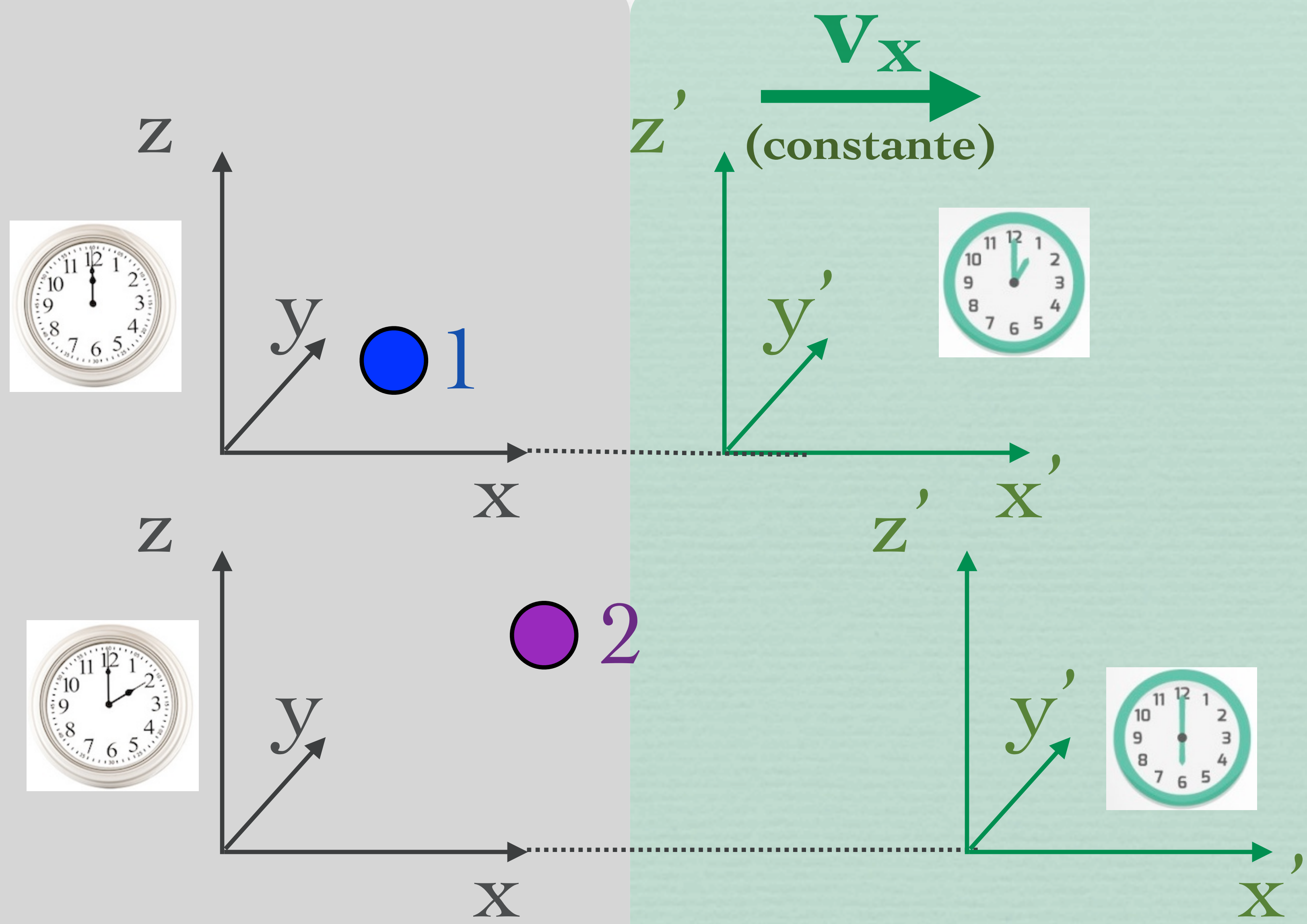
$$(\Delta\ell')^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1'$$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - v_x t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - v_x x/c^2) \end{aligned}$$

$$\Delta\ell' \neq \Delta\ell$$
$$\Delta t' \neq \Delta t$$

Como a Transformação de Lorentz da RR rompe as noções Newtonianas de espaço e de tempo?



$$\Delta\ell' \neq \Delta\ell$$
$$\Delta t' \neq \Delta t$$

Invariante:
separação entre os eventos 1 e 2 no espaço-tempo

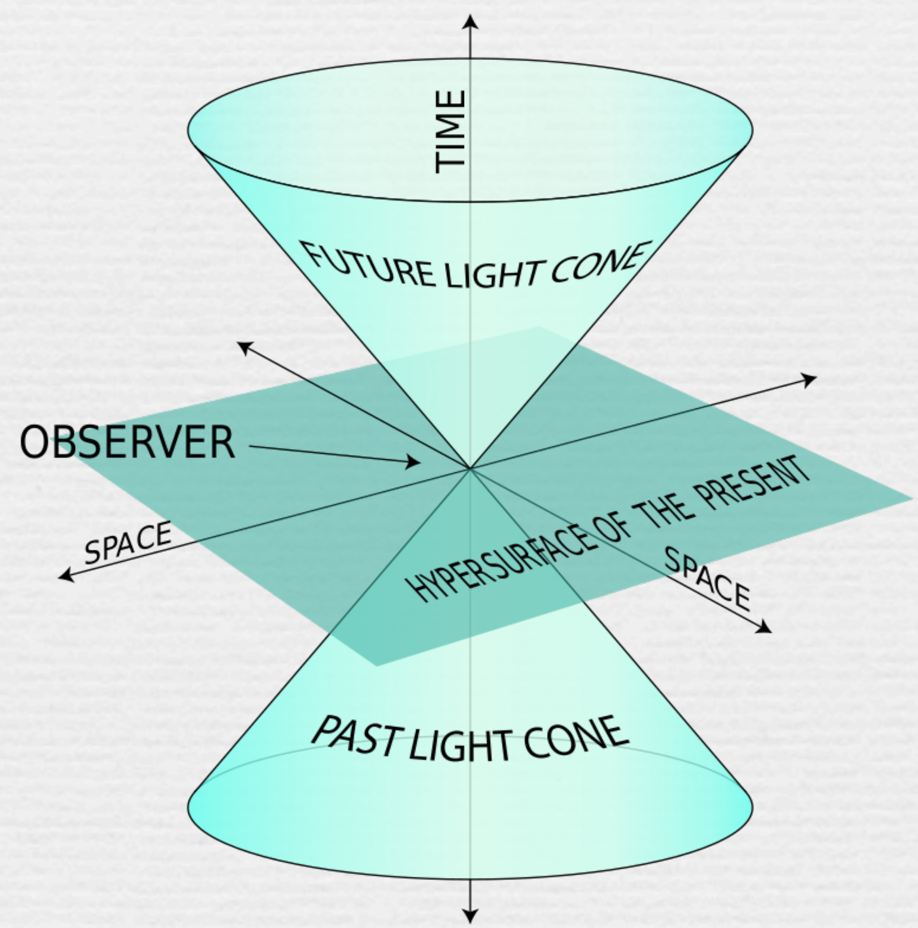
$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta\ell)^2 \qquad (\Delta s')^2 = -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta\ell')^2$$

$$\Delta s = \Delta s'$$

Como a Transformação de Lorentz da RR rompe as noções Newtonianas de espaço e de tempo?

Espaço-tempo quadrimensional de Minkowski

(1864-1909)



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c5/De_Raum_zeit_Minkowski_Bild.jpg

https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_space#/media/File:World_line.svg

Como a Transformação de Lorentz da RR rompe as noções Newtonianas de espaço e de tempo?

simultaneidade entre dois eventos é um conceito relativo

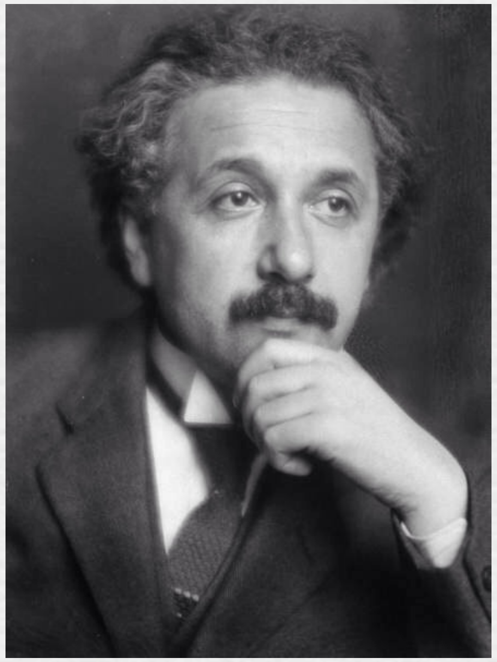
dilatação tempo

contração Lorentz

3.3 Fundamentos da Relatividade Geral

Generalizar a RR na presença da gravidade.

manifestação da
curvatura
do espaço-tempo

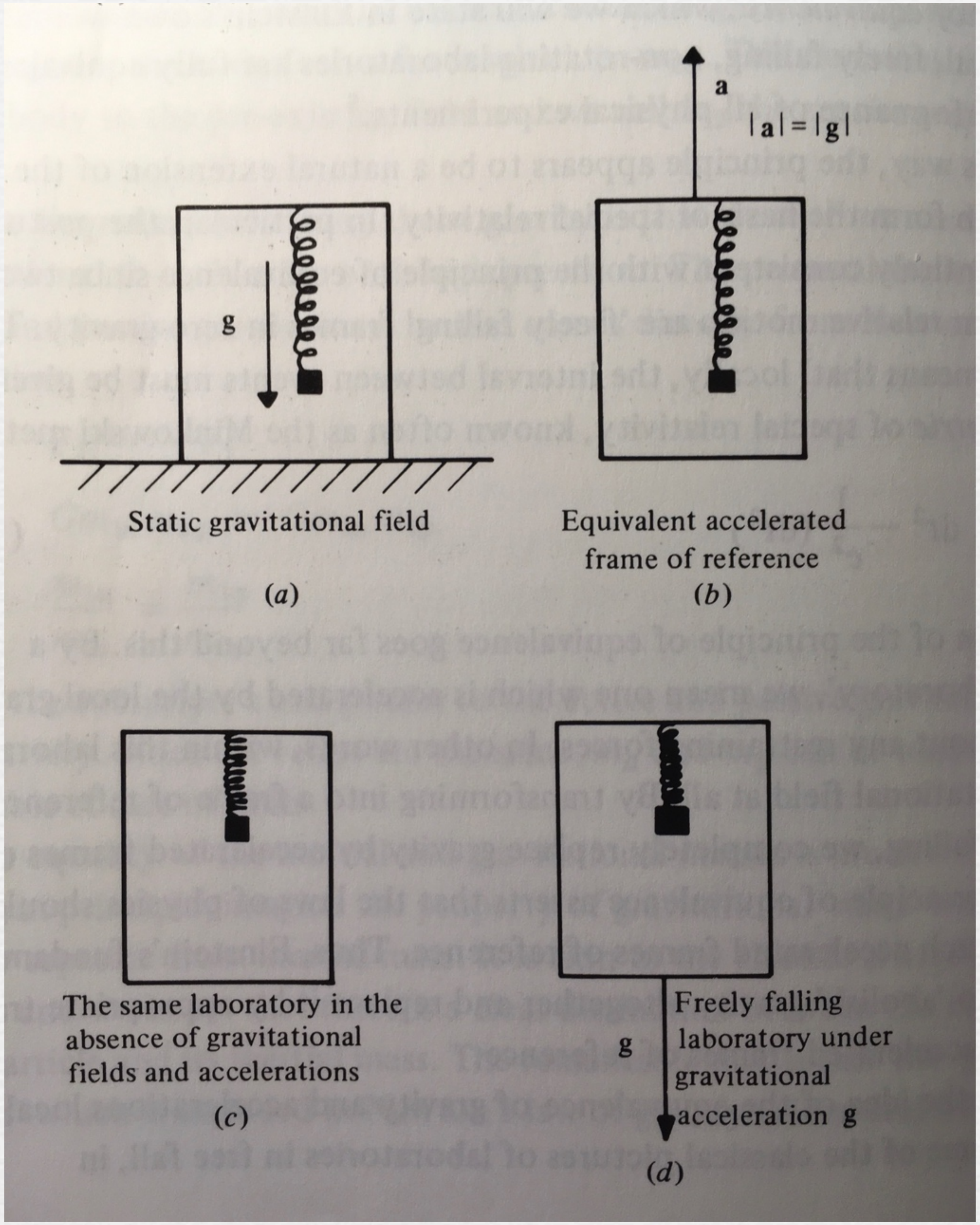


Constatação fundamental de Einstein:
"Princípio da Equivalência".

"O pensamento mais feliz da minha vida"
("The Origins of the General Theory of Relativity", lecture 1933)

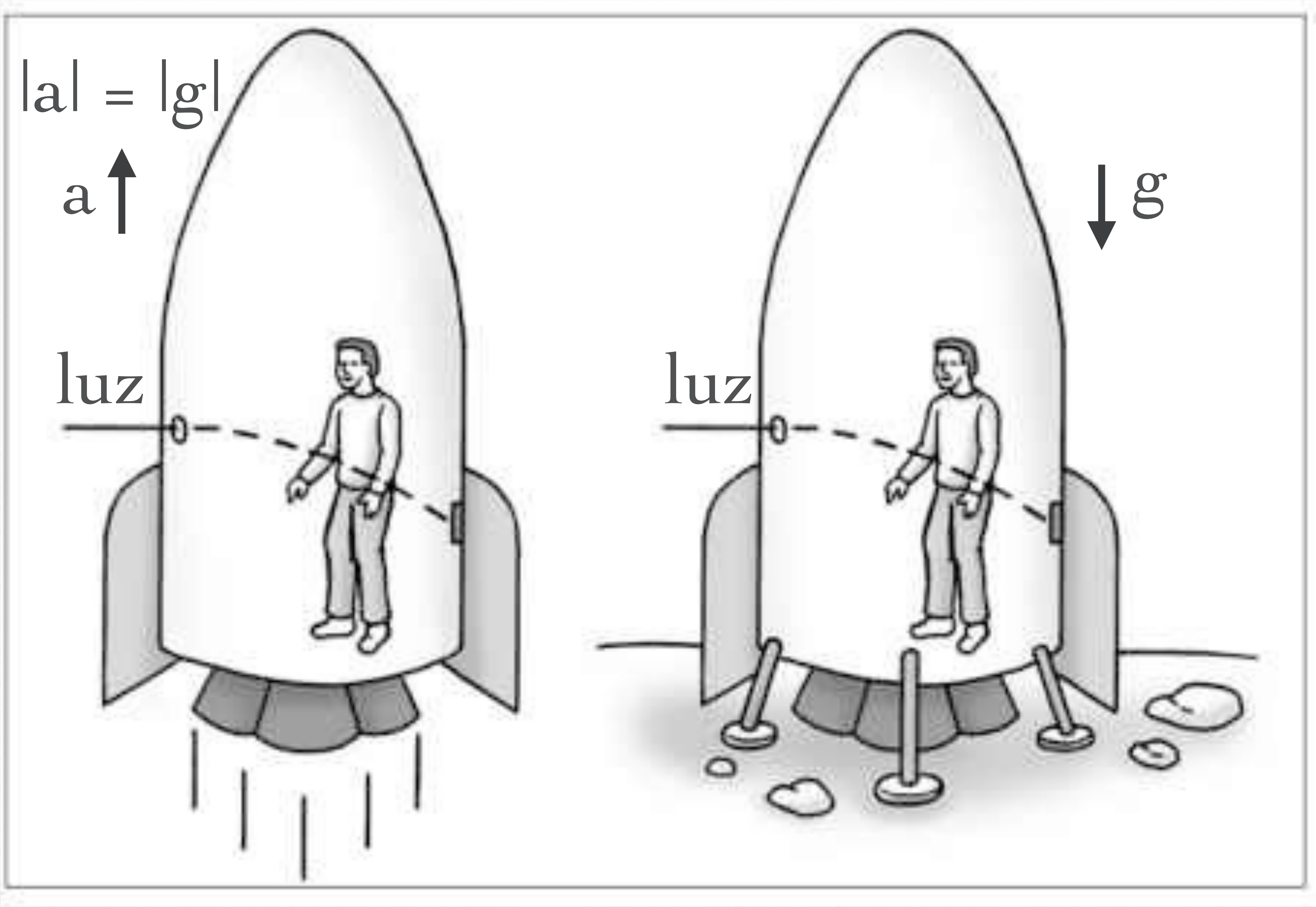
https://thecuriousastronomer.files.wordpress.com/2014/12/img_3316.jpg

Princípio da Equivalência



Theoretical Concepts in Physics (Longair, 1984).

Princípio da Equivalência



https://thecuriousastronomer.files.wordpress.com/2014/12/tmp7910_thumb_thumb.jpg

Princípio da Equivalência

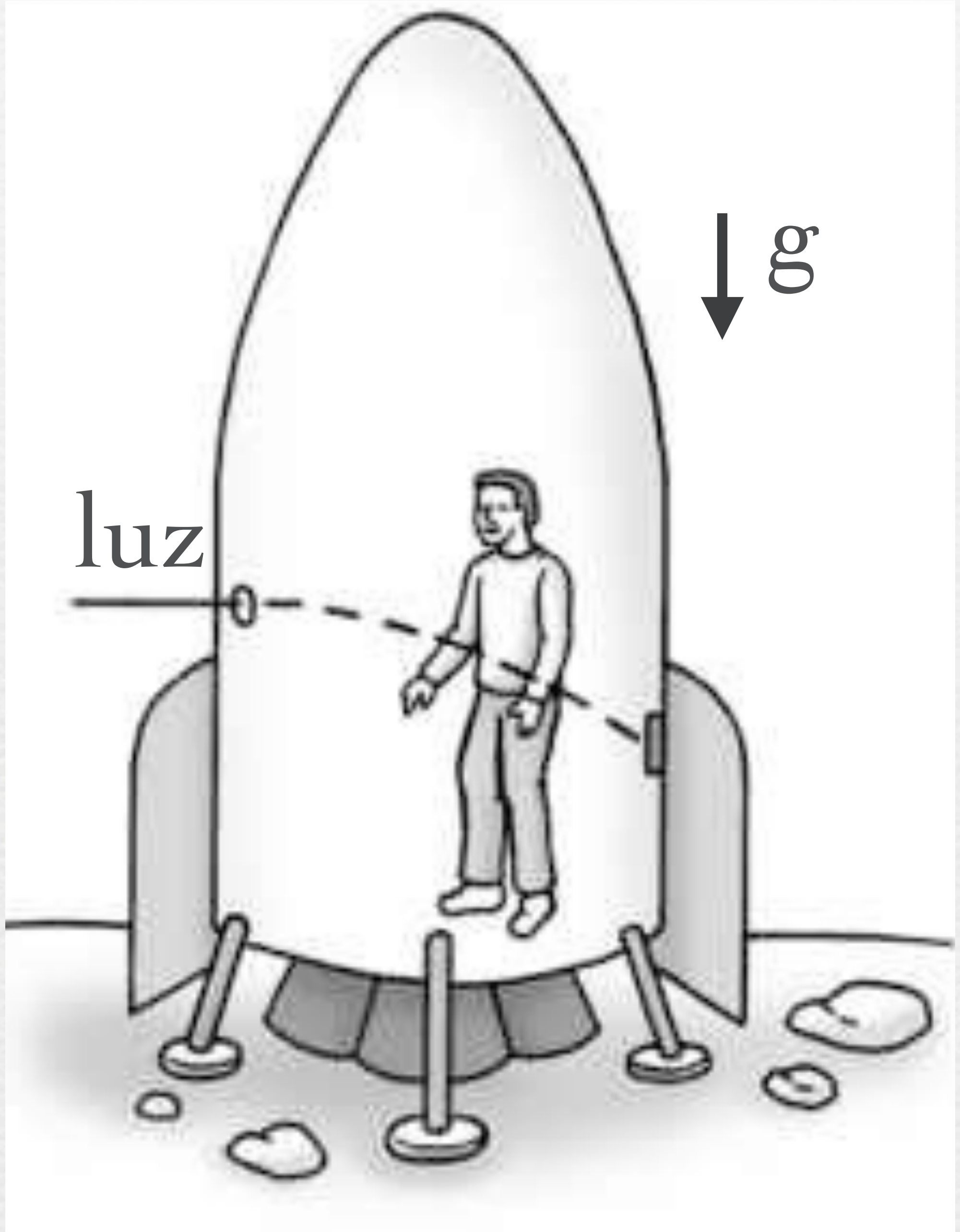
Feixe de luz se encurva na presença de gravitação.

Princípio de Fermat: a luz viaja entre dois pontos do espaço através de um trajetória que minimiza o tempo de viagem.

Considerando c = constante (vácuo) e espaço Euclideano:

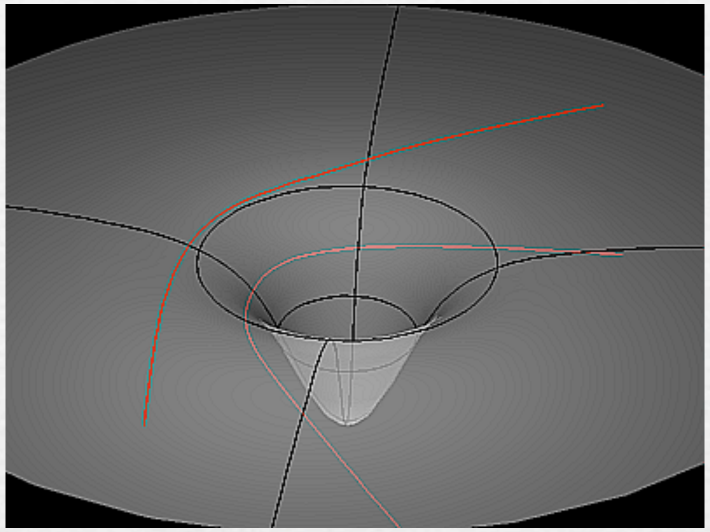
menor tempo $\mapsto$ menor espaço $\mapsto$ reta.

Espaço-tempo é curvo na presença de massa-energia.

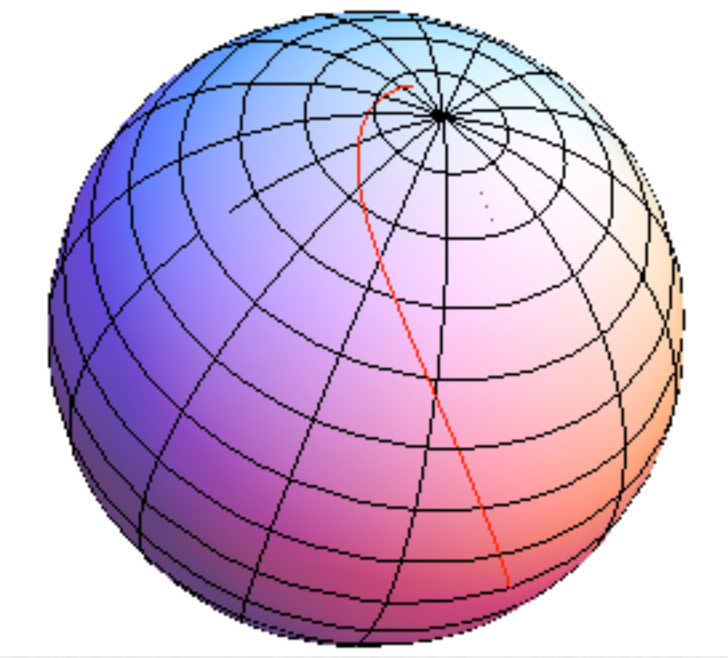


https://thecuriousastronomer.files.wordpress.com/2014/12/tmp7910_thumb_thumb.jpg

Geodésica: trajetória mais curta entre dois pontos.



RG: objetos se movem seguindo a geodésica no espaço-tempo.



RG: a aceleração gravitacional de um objeto é independente de sua massa e composição.

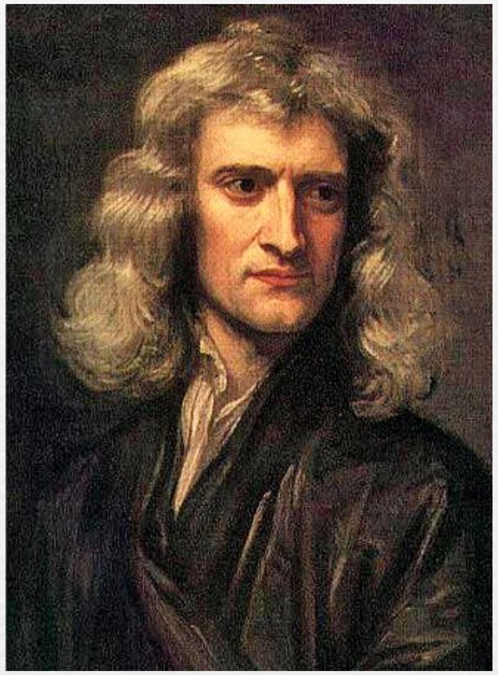
https://pt.wikipedia.org/wiki/Geod%C3%A9sica#/media/Ficheiro:Geodesiques.png

https://math.stackexchange.com/questions/316852/geodesics-on-a-2-sphere

$$\boxed{F} = -\frac{GMm}{r^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Newton:
Massa diz à gravidade como exercer força.
A força diz à massa como acelerar.



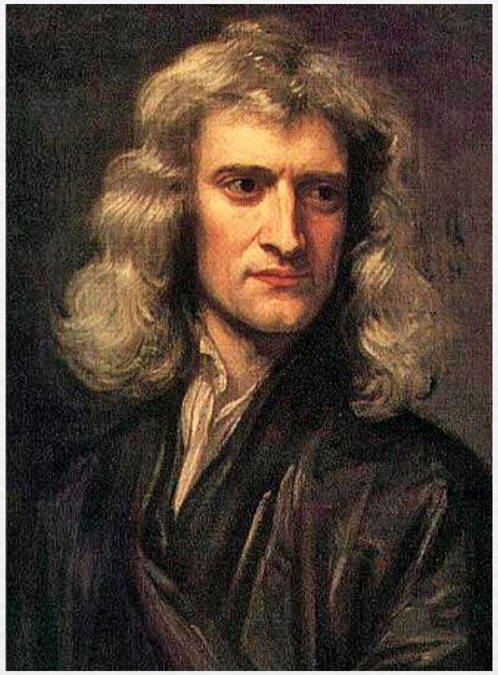
$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

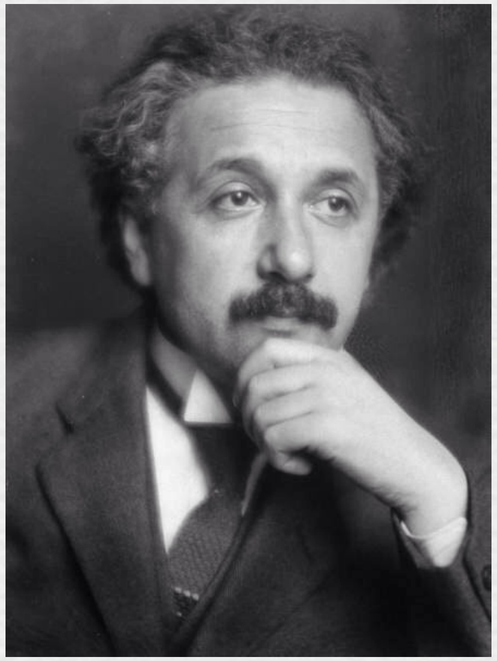
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Newton:
Massa diz à gravidade como exercer força.
A força diz à massa como acelerar.

Einstein:
Massa-energia diz ao espaço-tempo como curvar.
Espaço-tempo curvo diz à massa-energia como se mover.





3.4 Conceitos de Métrica e Curvatura

Einstein procurou uma equação de campo que pudesse relacionar a curvatura do espaço-tempo à sua densidade de massa-energia.

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

campo vetorial

Analogia

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

campo tensorial

Como podemos descrever matematicamente a curvatura do espaço-tempo?

Nota importante:

Vamos incialmente considerar **superfícies bidimensionais de espaços com curvaturas isotrópicas e uniformes**. Depois, vamos generalizar essas superfícies para espaços de maior dimensão.

Por exemplo, a superfície bidimensional de uma esfera é dita **"2-esfera"**, e podemos visualizá-la a partir do espaço tridimensional Euclideano (uma vez que a 2-esfera pode ser inserida neste).

Nota importante:

A superfície análoga da 2-esfera em 3 dimensões é a **``3-esfera”**, mas não conseguimos visualizá-la, pois iria requer nossa capacidade de processar visualmente o espaço Euclideano quadrimensional, onde ela estaria inserida.

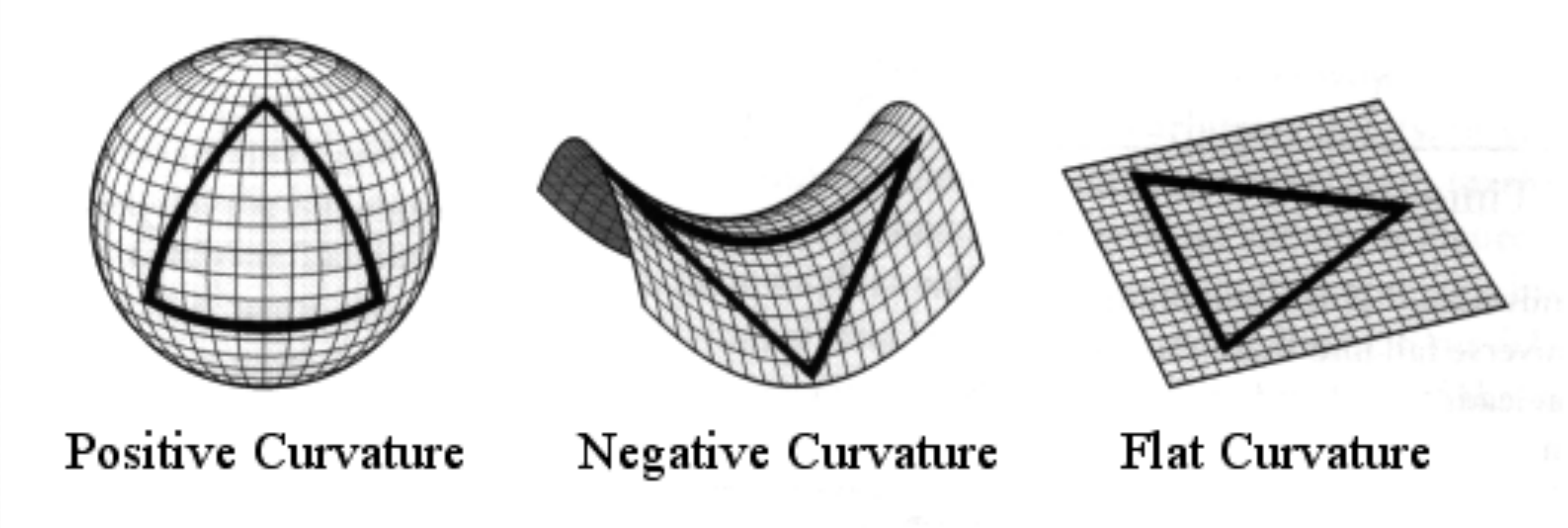
Podemos, entretanto, entender a 3-esfera analogamente à 2-esfera, como o conjunto de pontos equidistantes de um ponto central no espaço Euclideano quadrimensional.

Nota importante:

A **2-esfera** e seus análogos em maiores dimensões têm **curvatura positiva**.

Os únicos outros espaços que possuem curvatura isotrópica e uniforme são os **espaços planos Euclideanos**, de **curvatura nula**, e os espaços com **curvatura negativa**: o **2-hiperbolóide** e seus análogos em maiores dimensões.

Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo sobre a superfície bidimensional.

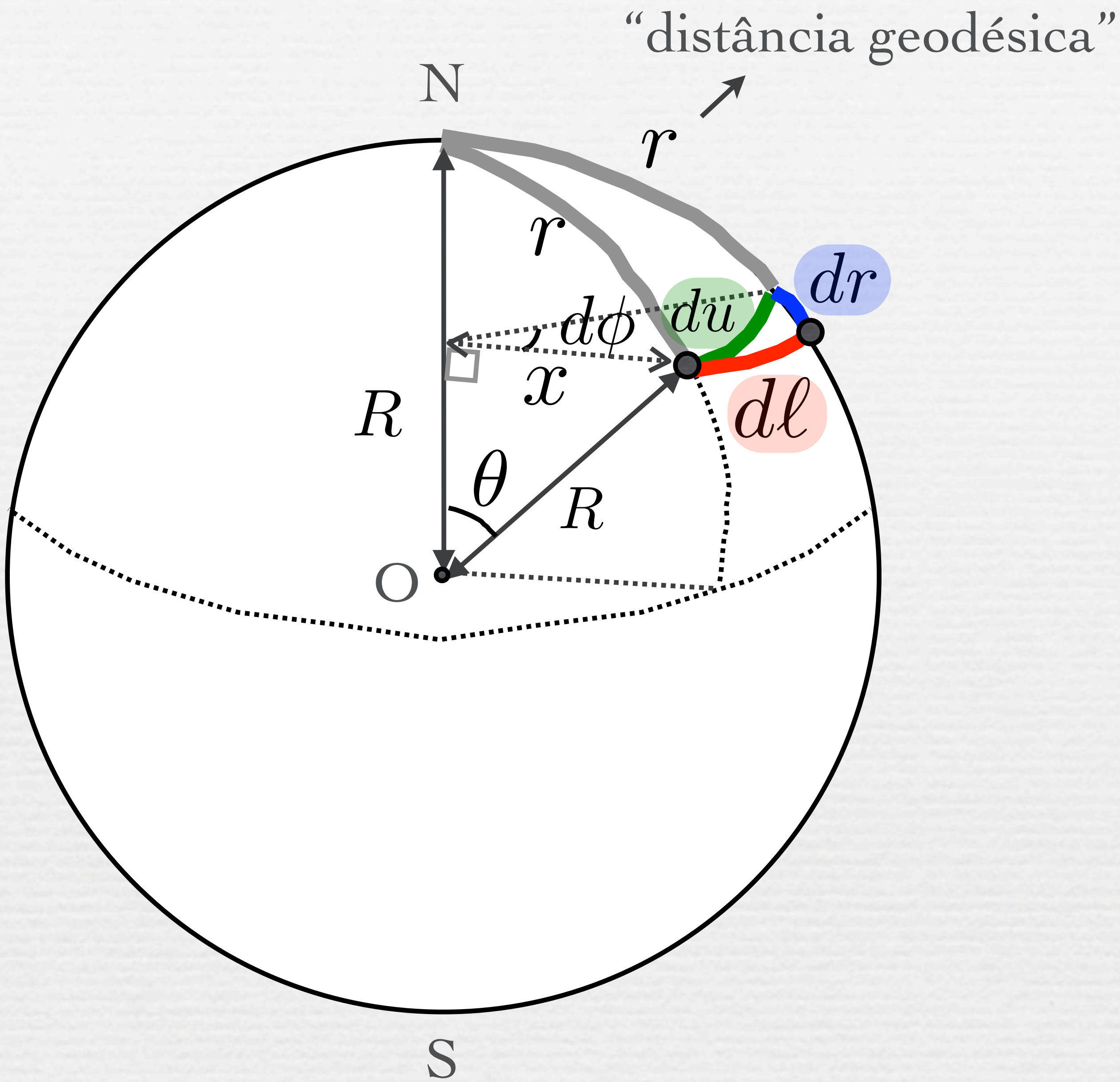


$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \frac{A}{r^2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2}$$

http://abyss.uoregon.edu/~js/cosmo/lectures/lec15.html



2-Esfera: superfície com curvatura positiva.

$$d\ell^2 = dr^2 + du^2$$

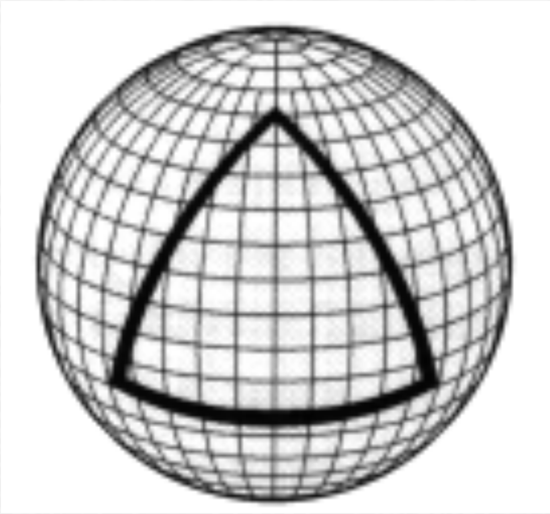
$$d\ell^2 = dr^2 + R^2 \sin^2(r/R) d\phi^2$$

"métrica"

$$\theta = \frac{r}{R}$$

$$x = R \sin(r/R)$$

$$du = x d\phi = R \sin(r/R) d\phi$$

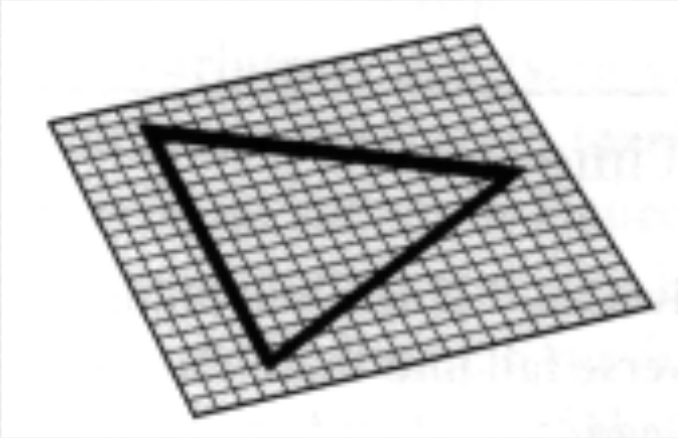


$$d\ell^2 = dr^2 + R^2 \sin^2(r/R) d\theta^2$$

$$\ell_{\text{max}} = \phi R \quad \text{(antípodas da esfera)}$$

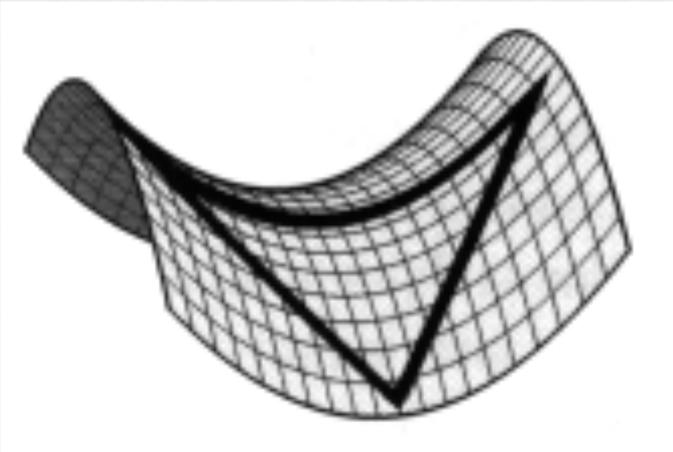
$$A_{\text{esfera}} = 4\pi R^2$$

Superfície de curvatura positiva uniforme tem área finita.



$$d\ell^2 = dr^2 + du^2$$

Plano: sem limite máximo de distância, área infinita.



$$d\ell^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(r/R) d\theta^2$$

Superfície de curvatura negativa uniforme: sem limite máximo de distância, área infinita.

Extensão para (``hiper”)superfícies tridimensionais, com curvatura homogênea e isotrópica.

Fazemos uma analogia com a métrica do **espaço Euclidiano plano (k = 0)**:

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$ (coordenadas cartesianas)

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2]$$ (coordenadas esféricas)

3-esfera (k = +1):

$$d\ell^2 = dr^2 + R^2\sin^2(r/R)[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2]$$

3-hiperbolóide (k = -1):

$$d\ell^2 = dr^2 + R^2\sinh^2(r/R)[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2]$$

As únicas 3 métricas possíveis para hipersuperfícies (3D) com curvatura homogênea e isotrópica podem ser escritas de forma compacta como:

$$d\ell^2 = dr^2 + S_\kappa^2(r) d\Omega^2 \qquad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2$$

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R \sin(r/R) & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R \sinh(r/R) & (\kappa = -1) \end{cases}$$

$$d\ell^2 = dr^2 + S_\kappa^2(r)d\Omega^2 \qquad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$$

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R\sin(r/R) & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R\sinh(r/R) & (\kappa = -1) \end{cases}$$

Limites:

$r \ll R :$

$S_\kappa \approx r \ (\forall \kappa)$

$\kappa = 0$ or $\kappa = -1 :$

$$\lim_{r \to \infty} S_\kappa(r) = \infty$$

$\kappa = +1 :$

$S_{\max} = R$ (em $r/R = \pi/2$)

$S_{\min} = 0$ (em $r/R = \pi$)

$$d\ell^2 = dr^2 + S_\kappa^2(r)d\Omega^2$$

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$$

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R\sin(r/R) & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R\sinh(r/R) & (\kappa = -1) \end{cases}$$

Sistema de coordenadas

(r, θ, ϕ)

$$d\ell^2 = dr^2 + S_\kappa^2(r)d\Omega^2 \qquad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$$

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R\sin(r/R) & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R\sinh(r/R) & (\kappa = -1) \end{cases}$$

Sistema de coordenadas
(r, θ, ϕ)

$x \equiv S_\kappa(r)$

Sistema de coordenadas
(x, θ, ϕ)

$$d\ell^2 = \frac{dx^2}{1 - \kappa x^2/R^2} + x^2 d\Omega^2$$

3.5 Métrica de FLRW

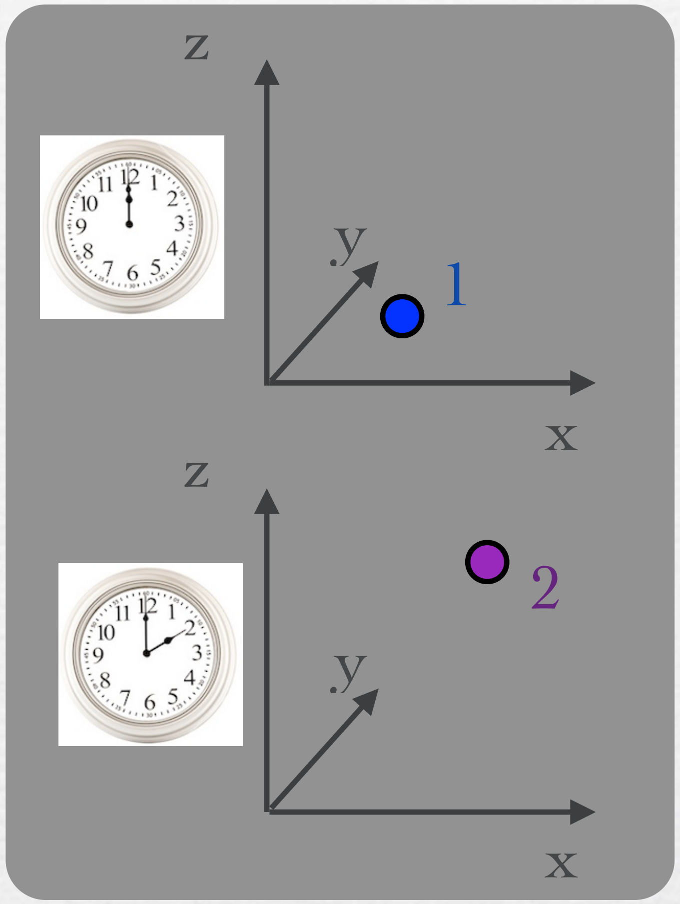
Na seção anterior, vimos como expressar a **métrica (separação entre dois pontos) de espaços tridimensionais** de curvatura homogênea e isotrópica.

Na **RR** e **RG**, ao invés da separação entre pontos num espaço 3D, precisamos considerar a **separação entre dois eventos em 4D**.

RR: espaço-tempo 4D ("plano"), métrica de Minkowski.

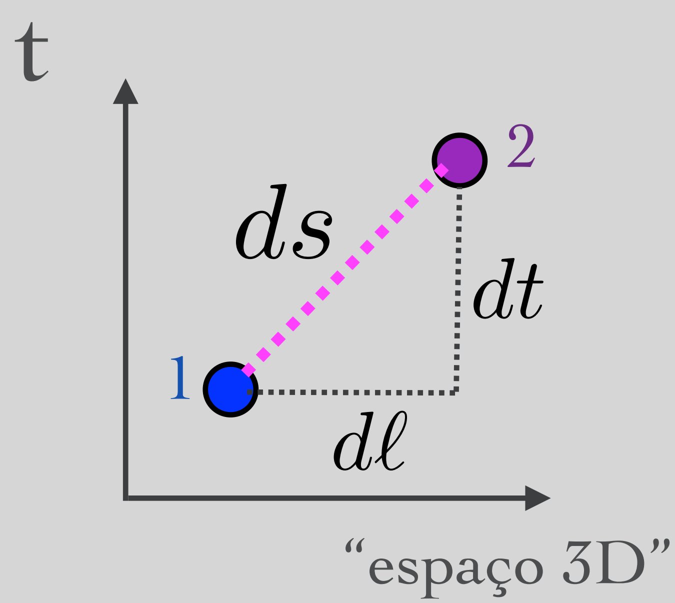
RG + hom. e isot.: espaço-tempo quadrimensional ("curvo"), métrica de FLRW.

RR: separação no espaço-tempo entre dois eventos, 1 e 2.



Usaremos as coordenadas esféricas para a parte espacial:

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \longrightarrow d\ell^2 = dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2]$$



Evento 1: (t, r, θ, ϕ)

Evento 2: $(t + dt, r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$

métrica de Minkowski

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2$$

métrica de Minkowski

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

componente espacial é Euclideana

métrica de Minkowski

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$(-, +, +, +)$ (assinatura da métrica - convenção)

$$ds^2 = \begin{cases} < & 0 \quad (\text{“time} - \text{like”}) \\ = & 0 \quad (\text{“null”}) \\ > & 0 \quad (\text{“space} - \text{like”}) \end{cases}$$

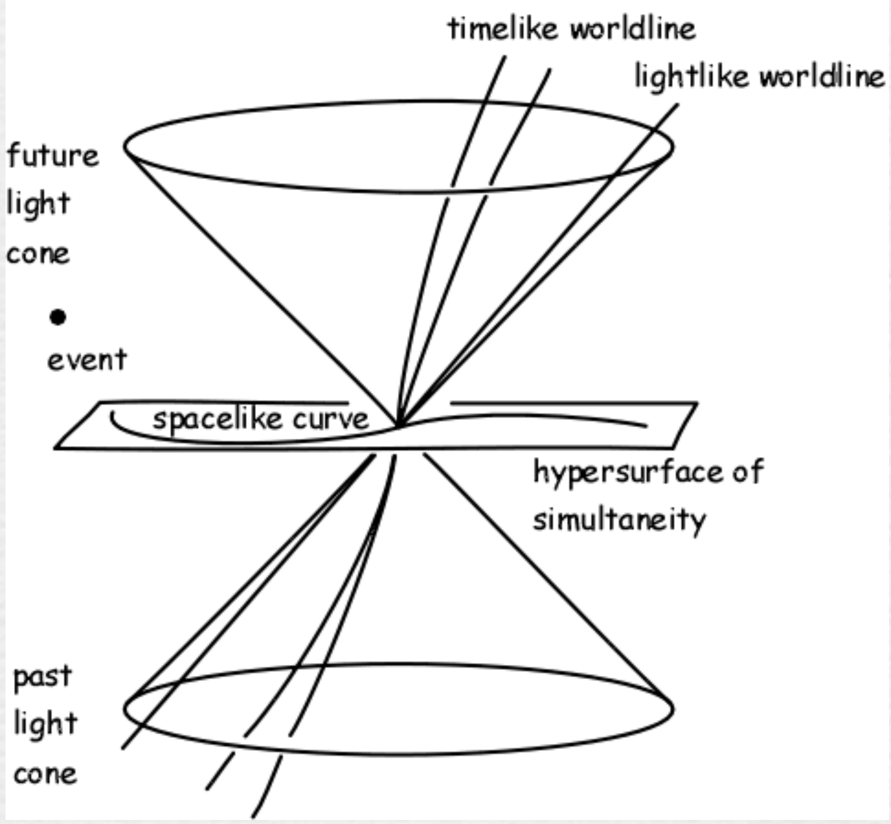
“light-like”

(convenção de Einstein)

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(tensor métrico)

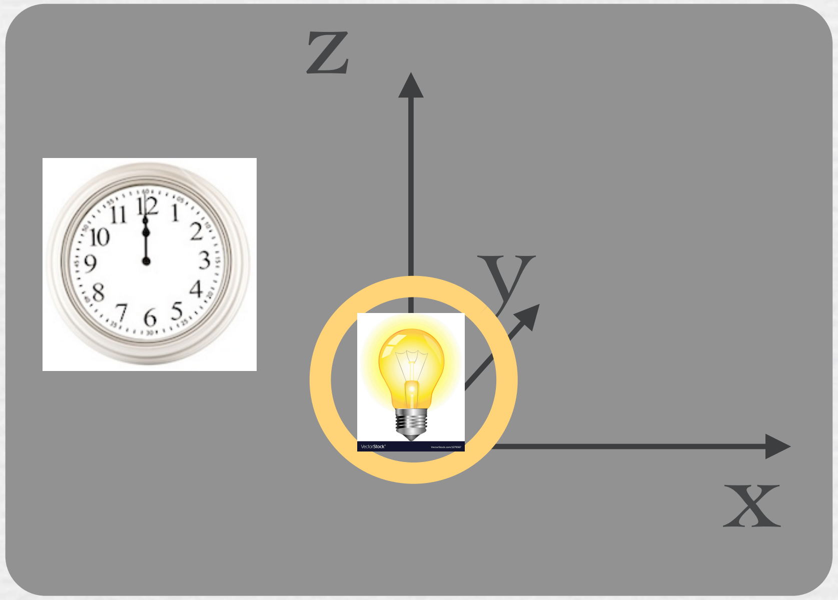


https://www.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS_0410/chapters/spacetime/index.html

métrica de Minkowski

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2$$

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



Fóton: $ds^2 = 0$

A trajetória do fóton é uma **geodésica nula** no espaço-tempo 4D.

Cada segmento **ds** da trajetória é nulo.

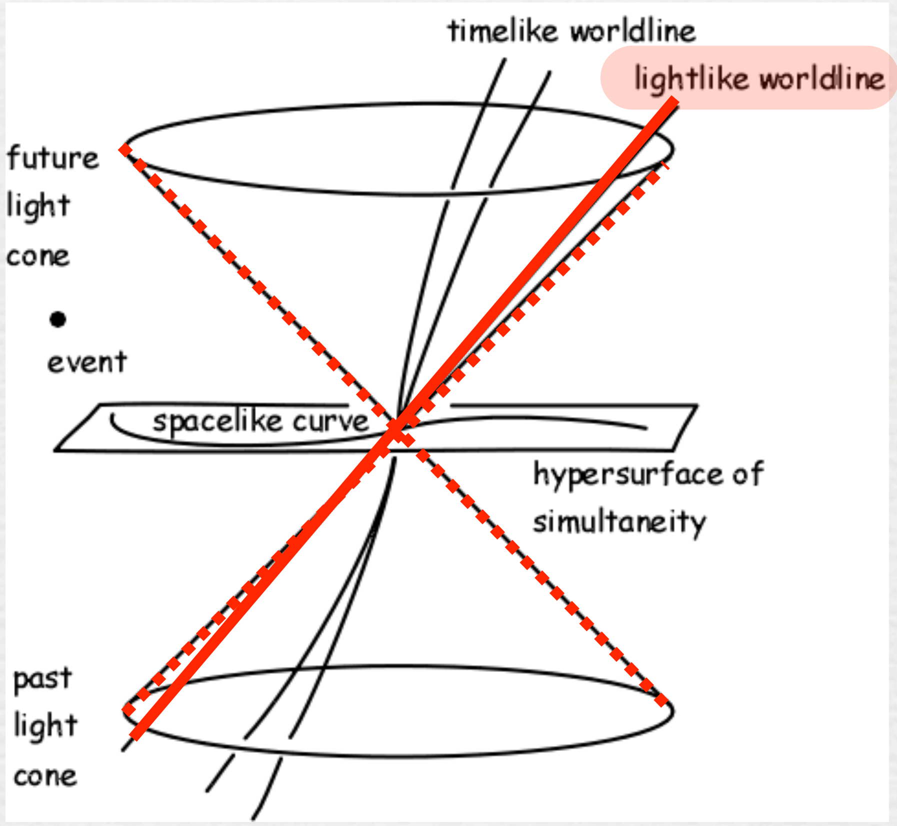
métrica de Minkowski

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Fóton: $ds^2 = 0$

Trajetória radial: $d\Omega = 0$
$(\theta, \phi = \text{const})$

$$c^2 dt^2 = dr^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm c$$



métrica de Minkowski

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Espaço-tempo com curvatura homogênea e isotrópica que pode expandir ou contrair:

Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

métrica de FLRW

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_\kappa^2(r) d\Omega^2]$$

Fator de escala

$$a(t_0) \equiv 1$$

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R_0 \sin(r/R_0) & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R_0 \sinh(r/R_0) & (\kappa = -1) \end{cases}$$

(t=0)

métrica de FLRW

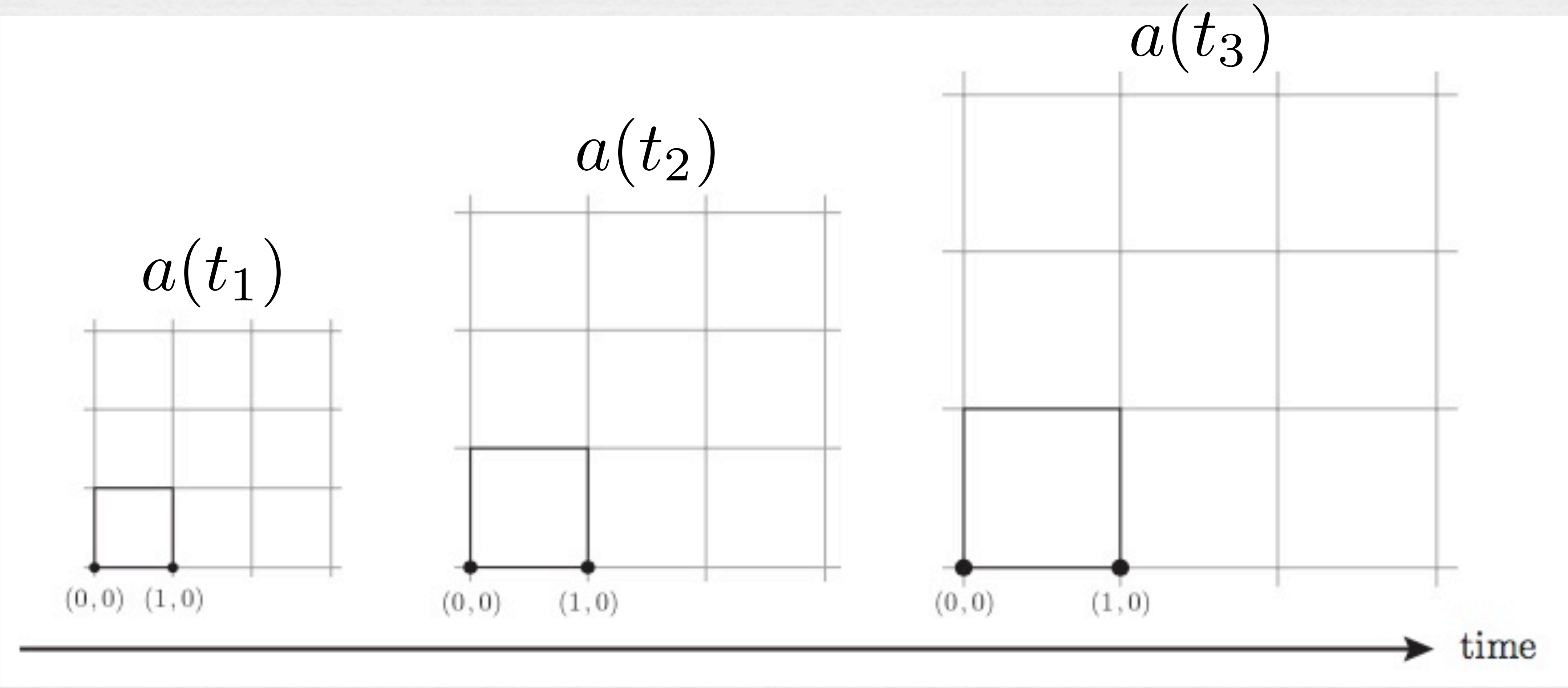
$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_\kappa^2(r) d\Omega^2]$$

tempo "cósmico" ou "próprio"

coordenadas "comóveis" ou "próprias" (r, θ, ϕ)

Tempo medido por um referencial que observa o universo expandindo de forma uniforme e isotrópica ao seu redor.

As coordenadas comóveis de um dado ponto são constantes num universo expandindo de forma homogênea e isotrópica.



www.damtp.cam.ac.uk/user/db275/cosmology.pdf

métrica de FLRW

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2[dr^2 + S_\kappa^2(r)d\Omega^2]$$

tempo "cósmico" ou "próprio"

Tempo conforme: $$d\eta = \frac{dt}{a(t)}$$

Fatorização da métrica de FLRW:

$$\boxed{ds^2 = a(\eta)^2[-c^2 d\eta^2 + dr^2 + S_\kappa^2(r)d\Omega^2]}$$

Fator de escala
(reparametrizado)

métrica de Minkowski estática
(pois as variáveis são comóveis)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Ao transformarmos para o tempo conforme, como a luz viaja na geodésica nula (ds = 0), sua propagação no espaço-tempo de FLRW é matematicamente a mesma que no espaço-tempo de Minkowski.

Tempo conforme: $$d\eta = \frac{dt}{a(t)}$$

Fatorização da métrica de FLRW:

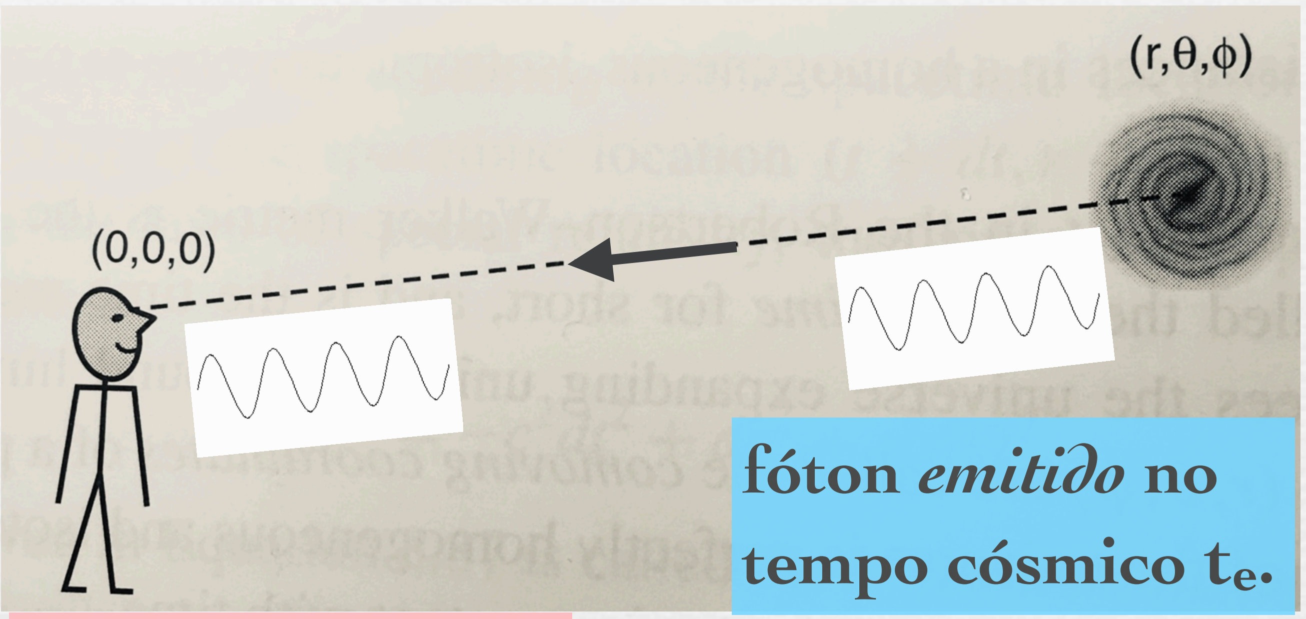
$$\boxed{ds^2 = a(\eta)^2\left[-c^2 d\eta^2 + dr^2 + S_\kappa^2(r)d\Omega^2\right]}$$

Fator de escala
(reparametrizado)

métrica de Minkowski estática
(pois as variáveis são comóveis)

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

3.6 Distância Própria



fóton *emitido* no tempo cósmico t_e.

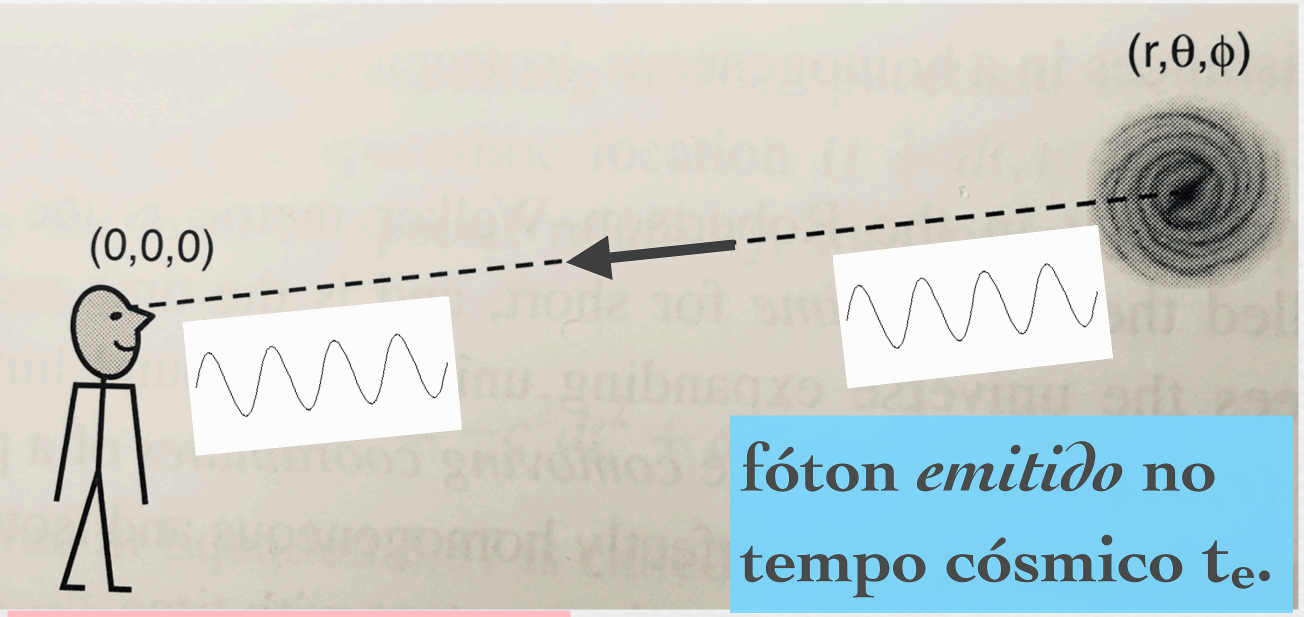
fóton *recebido* no tempo cósmico t_0.

Qual a distância entre a galáxia e o observador, considerando que o Universo está em expansão?

A distância entre dois pontos aumenta com o tempo.

Precisamos especificar o tempo que estabelece a distância correta.

Distância própria: $d_p(t)$ → Comprimento da **geodésica espacial** entre dois pontos quando o fator de escala é a(t).



fóton *emitido* no tempo cósmico t_e.

fóton *recebido* no tempo cósmico t_0.

Métrica de FLRW **para um t fixo**:

$$ds^2 = a(t)^2[dr^2 + S_\kappa^2(r)d\Omega^2]$$

$$(\theta, \phi = \text{const})$$

Ao longo da geodésica espacial percorrida pelo fóton, os ângulos são os mesmos, logo a métrica de FLRW **para um t fixo** se reduz à:

$$ds = a(t)dr$$

Integrando ao longo da coordenada comóvel radial, obtemos a distância própria **num tempo t fixo**:

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r dr = a(t)r$$

Integrando ao longo da coordenada comóvel radial,
obtemos a distância própria **num tempo t fixo**:

$$d_p(t) = a(t)r$$

Nota: r é uma coordenada comóvel, i.e., **constante** durante toda a expansão.

$$r = \frac{d_p(t)}{a(t)} = \text{ const}$$

Integrando ao longo da coordenada comóvel radial,
obtemos a distância própria **num tempo t fixo**:

$$d_p(t) = a(t)r \longrightarrow$$

Nota: r é uma coordenada comóvel, i.e., **constante** durante toda a expansão.

$$r = \frac{d_p(t)}{a(t)} = \text{const}$$

Qual é a **taxa de mudança da distância própria** entre dois pontos?

$$\frac{d[d_p(t)]}{dt} \equiv \dot{d}_p(t) \equiv v_p(t) \longrightarrow \dot{d}_p = \dot{a}r = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) d_p$$

Integrando ao longo da coordenada comóvel radial, obtemos a distância própria **num tempo t fixo**:

$$d_p(t) = a(t)r \longrightarrow$$

Nota: r é uma coordenada comóvel, i.e., **constante** durante toda a expansão.

$$r = \frac{d_p(t)}{a(t)} = \text{const}$$

Qual é a **taxa de mudança da distância própria** entre dois pontos?

$$\frac{d[d_p(t)]}{dt} \equiv \dot{d}_p(t) \equiv v_p(t) \longrightarrow \dot{d}_p = \dot{a}r = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) d_p$$

Constante de Hubble

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0}$$

Para o **tempo atual** (hoje), **t = t₀**, temos:

$$\boxed{v_p(t_0) = H_0 d_p(t_0)}$$

Num universo em expansão homogênea e isotrópica, **velocidade de recessão de uma galáxia** (associada ao fundo em expansão) aumenta linearmente com a distância própria entre o observador e a galáxia observada (*velocidade e distância avaliadas hoje*).

Constante de Hubble

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0}$$

Para o **tempo atual** (hoje), **t = t$_0$**, temos:

$$v_p(t_0) = H_0 d_p(t_0)$$

$$H_0 = 68 \pm 2 \text{ km/s Mpc}^{-1}$$

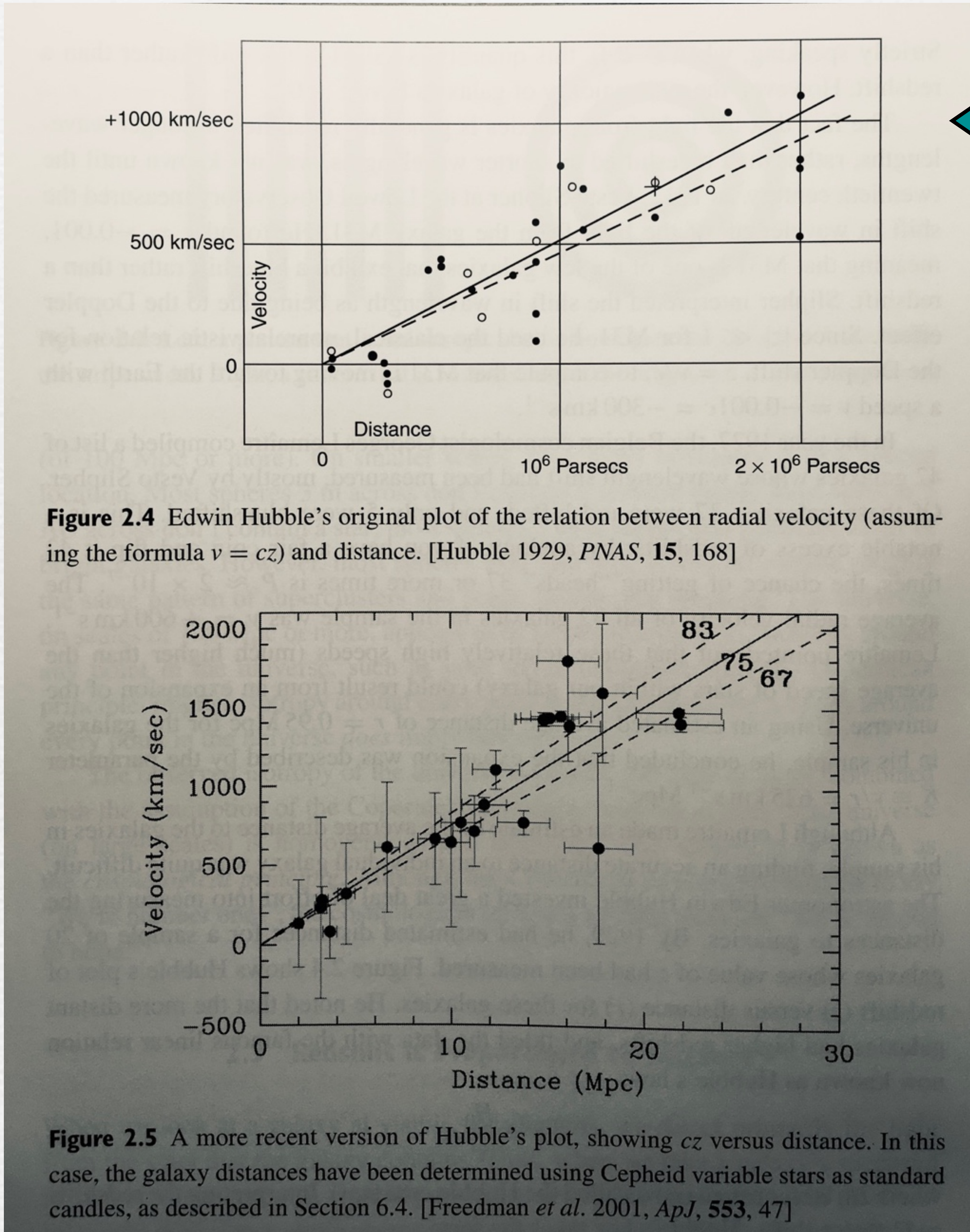


Figure 2.4 Edwin Hubble's original plot of the relation between radial velocity (assuming the formula $v = cz$) and distance. [Hubble 1929, *PNAS*, **15**, 168]

Figure 2.5 A more recent version of Hubble's plot, showing cz versus distance. In this case, the galaxy distances have been determined using Cepheid variable stars as standard candles, as described in Section 6.4. [Freedman *et al.* 2001, *ApJ*, **553**, 47]

Diagrama de Hubble

Para o **tempo atual** (hoje), **t = t₀**, temos:

$$\boxed{v_p(t_0) = H_0 d_p(t_0)}$$

Constante de Hubble

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0}$$

$$H_0 = 68 \pm 2 \text{ km/s Mpc}^{-1}$$

Notas:

Igualando a velocidade de recessão à velocidade da luz (c):

$$v_p(t_0) = H_0 d_p(t_0) = c \longrightarrow$$

Distância de Hubble

$$d_{\mathrm{H}}(t_0) \equiv \frac{c}{H_0}$$

$$d_{\mathrm{H}}(t_0) = 4380 \pm 130 \text{ Mpc}$$

Galáxias mais distantes (de nós) do que esse valor recedem com **velocidade maior do que a da luz**.

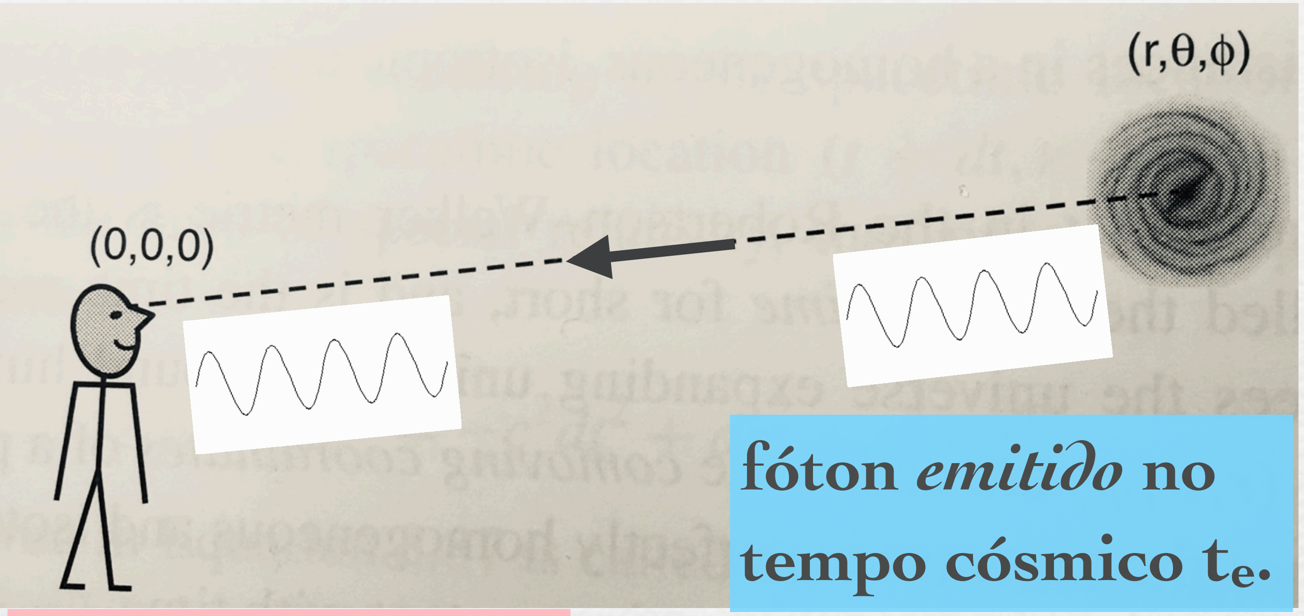
Notas:

Galáxias mais distantes (de nós) do que a distância de Hubble recedem com **velocidade maior do que a da luz**.

Este resultado **não** está em conflito com a **relatividade geral**: é permissível que dois pontos se afastem com velocidade maior do que a luz **devido à expansão do espaço**.

Na **relatividade restrita**, o **espaço é estático** e dois objetos massivos não podem atingir velocidade relativa (entre ambos) que seja maior do que a velocidade da luz.

Distância própria: $d_p(t)$



fóton *emitido* no tempo cósmico t_e.

fóton *recebido* no tempo cósmico t_0.

Uma galáxia observada hoje está a uma distância própria dada por:

$$\boxed{d_p(t_0) = a(t_0)r = r}$$

A **distância própria** até uma galáxia distante **(considerada para um observador em $t=t_0$)** é igual à diferença entre as coordenadas radiais comóveis da galáxia (r_{gal} = r) e do observador (r_{obs} = 0), onde tomamos a normalização:

$$a(t_0) \equiv 1$$

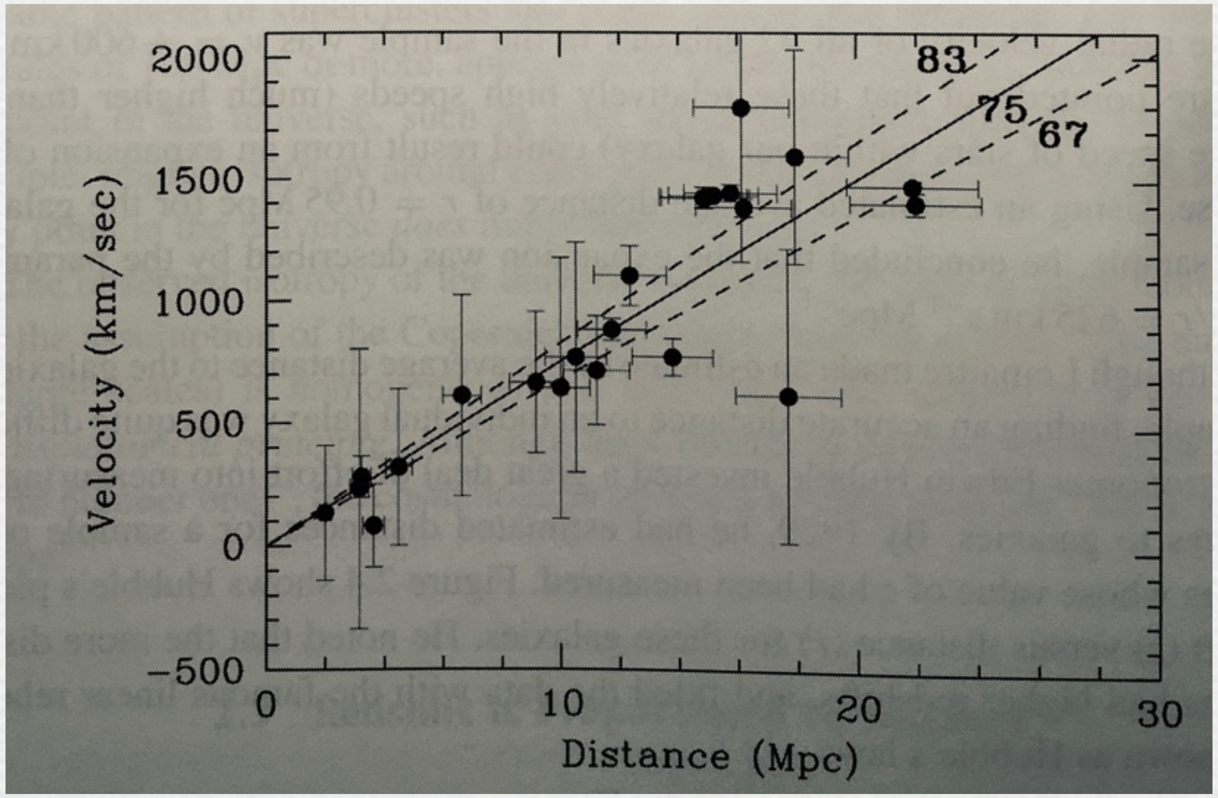
Nota: $\boxed{d_p(t_0) = a(t_0)r = r}$ → A **distância própria** não é observável! (Não podemos medí-la...)

Nota: $\boxed{d_p(t_0) = a(t_0)r = r}$ → A **distância própria** não é observável! (Não podemos medí-la...)

Diagrama de Hubble

Deslocamento Doppler não-relativístico para relacionar o **redshift** observado à velocidade de recessão.

$$\boxed{v = cz}$$

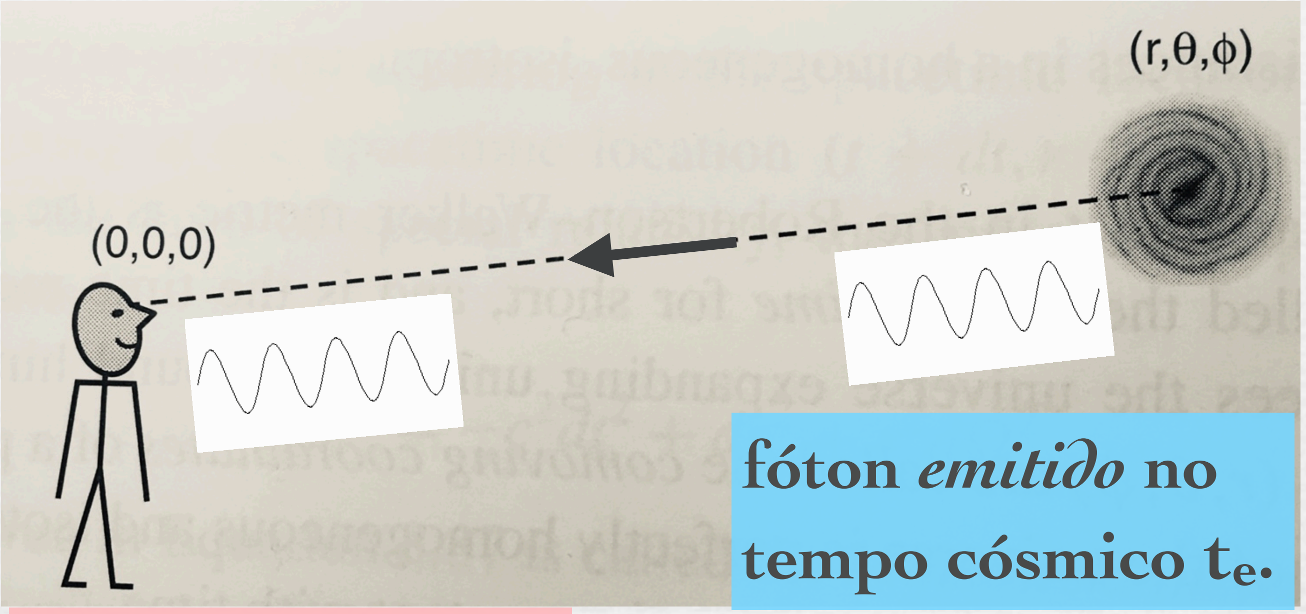


$$\boxed{\begin{gathered} v = H_0 d \\ \textbf{ou} \\ z = (H_0/c)d \end{gathered}}$$

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}}$$

Distâncias "d" determinadas por **velas-padrão** (estrelas variáveis Cefeidas).

Nota: $\boxed{d_p(t_0) = a(t_0)r = r}$ → A **distância própria** não é observável! (Não podemos medí-la...)



fóton *emitido* no tempo cósmico t_e.

fóton *recebido* no tempo cósmico t_0.

Porém, podemos **medir o redshift** da luz da galáxia (emitida em $t = t_e$), recebida pelo observador (em $t=t_0$).

Observável:

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \Rightarrow a(t_e)$$

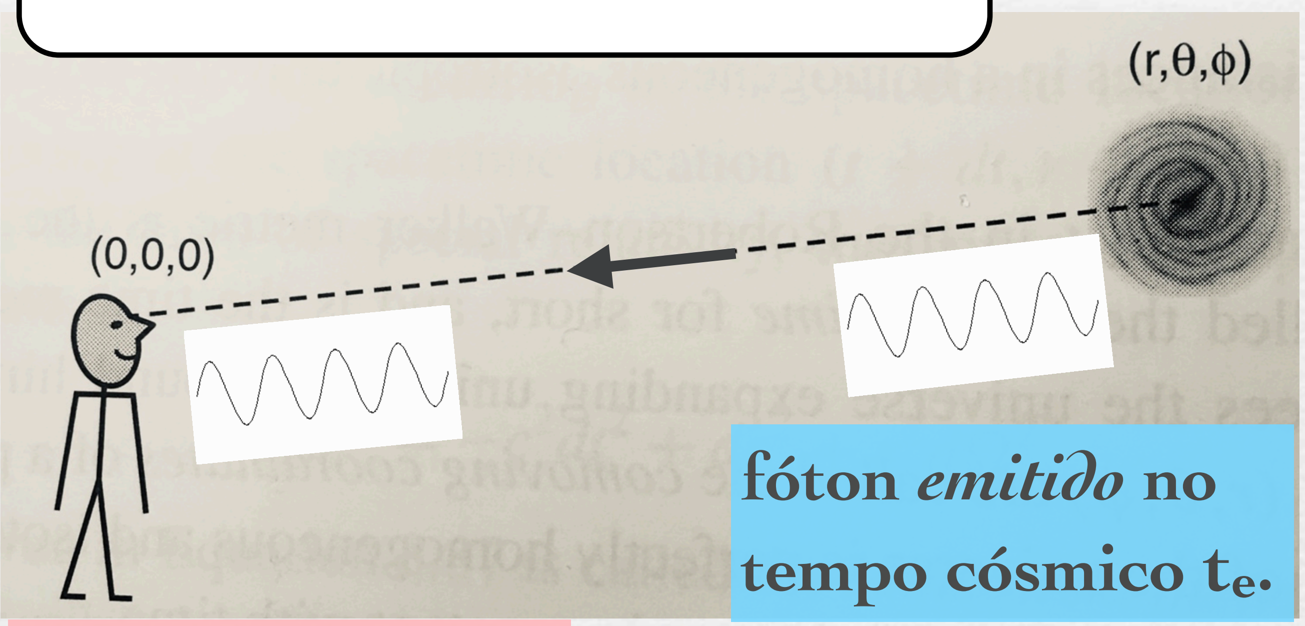
O redshift não diz nada sobre a distância própria até a galáxia, porém informa qual era o fator de escala no tempo em que a luz foi emitida: $a(t_e)$.

Conexão entre *z* e *a(tₑ)*:

Observável:

$$z \equiv \frac{\lambda_{\rm obs} - \lambda_{\rm em}}{\lambda_{\rm em}} \Rightarrow a(t_e)$$

Queremos obter a diferença entre os dois eventos no espaço-tempo.



fóton *emitido* no tempo cósmico t_e.

fóton *recebido* no tempo cósmico t_0.

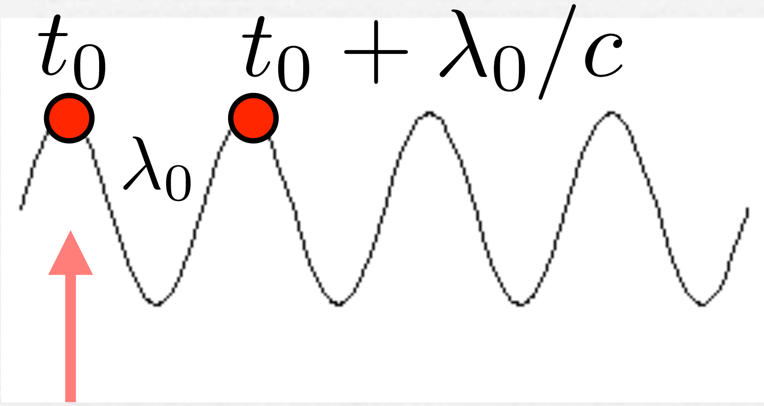
$$(\theta, \phi = \text{const})$$

A luz da galáxia distante se propagou ao longo de uma geodésica nula (ds = 0):

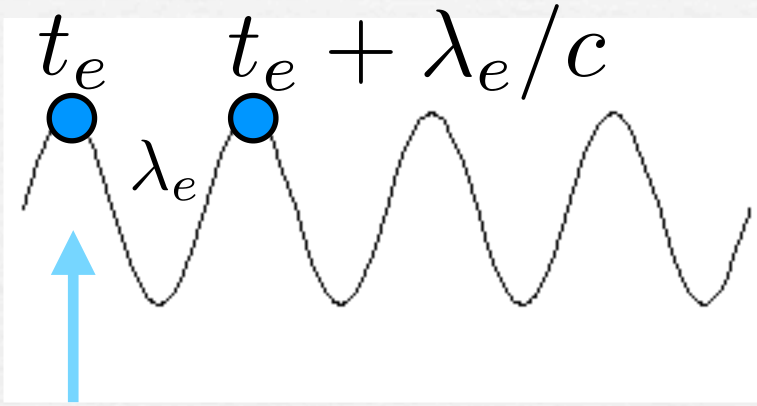
$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2$$

$$\underbrace{c\frac{dt}{a(t)}}_{\text{f(t)}} = \underbrace{dr}_{\text{indep. t}}$$

Conexão entre z e $a(t_e)$:



máximo da onda *recebida* no tempo cósmico t_0.



máximo da onda *emitida* no tempo cósmico t_e.

Em geral: $\lambda_0 \neq \lambda_e$

$$c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r$$

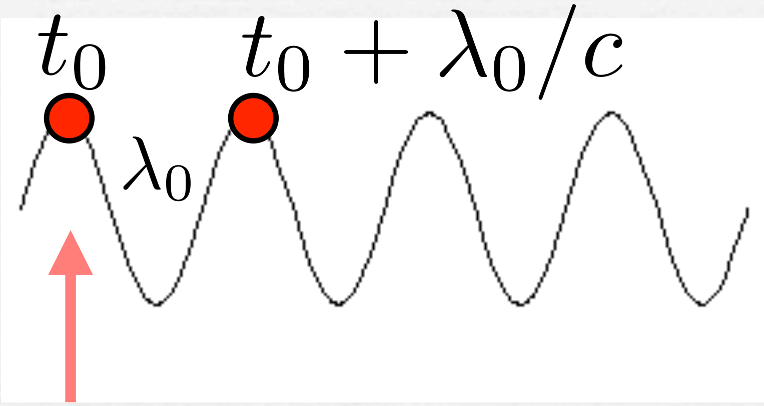
$$c\int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r$$

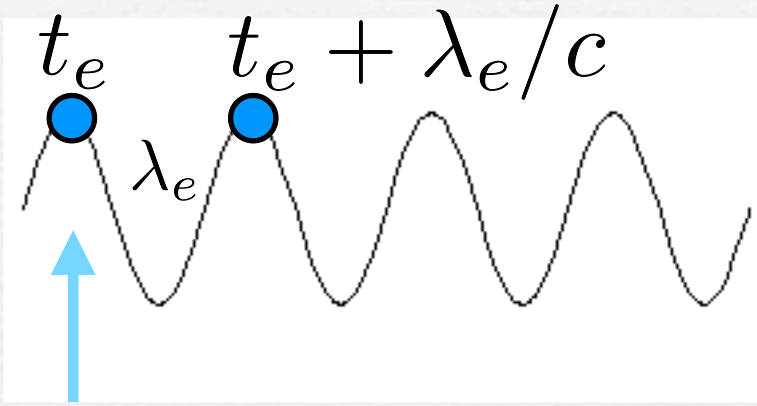
$$\Rightarrow \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}$$

A integral de t_e a t_0 tem sempre o mesmo valor para uma dada altura fixa da onda EM.

(e.g., máximo)

Conexão entre z e $a(t_e)$:





máximo da onda *recebida* no tempo cósmico t_0.

Em geral: $\lambda_0 \neq \lambda_e$

máximo da onda *emitida* no tempo cósmico t_e.

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}$$

A integral tem o mesmo valor para dois máximos sucessivos da onda EM.

(ou outra altura fixa)

Conexão entre z e $a(t_e)$:

máximo da onda *recebida* no tempo cósmico t_0.

Em geral: $\lambda_0 \neq \lambda_e$

máximo da onda *emitida* no tempo cósmico t_e.

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} dt \;\Rightarrow\; \frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}$$

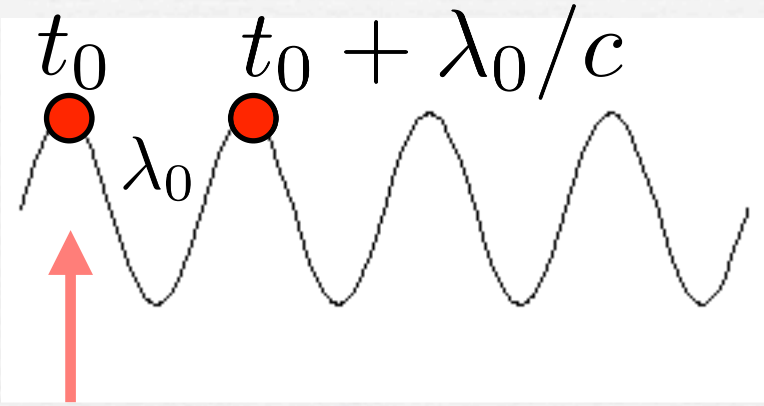
Fora da integral: durante o tempo entre dois máximos da onda (seja na emissão ou na recepção), o Universo não expandiu quase nada.

$$H_0^{-1} \approx 14 \text{ Gyr}$$ **Tempo de Hubble**

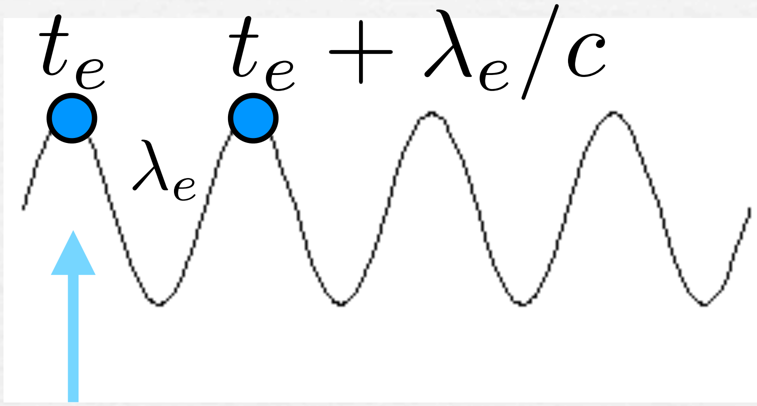
$$\lambda/c \approx 2 \times 10^{-15} s \approx 10^{-32} H_0^{-1}$$

(para luz visível)

Conexão entre z e $a(t_e)$:



máximo da onda *recebida* no tempo cósmico t_0.



máximo da onda *emitida* no tempo cósmico t_e.

Em geral: $\lambda_0 \neq \lambda_e$

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} dt \;\Rightarrow\; \frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \\ a(t_0) \equiv 1 \end{array}\right\} \quad \boxed{z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)}}$$

Conexão entre z e $a(t_e)$:

$$\boxed{z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)}}$$

O redshift que observamos de um objeto distante **depende apenas dos fatores de escala relativos** no tempo da emissão e no tempo da recepção. Isto é, **o redshift não depende de como** a transição entre $a(t_e)$ e $a(t_0)$ for feita (abrupta, gradual, monotônica, oscilatória... etc).

Fundamentos de Cosmologia

Aula 3

Concluída

AST-413-4 - INPE - 2020-3

Prof. Dr. Carlos Alexandre Wuensche
Prof. Dra. Christine Córdula Dantas