



# **Aula 11 – Formação de estruturas: instabilidade gravitacional, bárions e fótons**

**C.A.Wuensche / C. Córdula Dantas  
ca.wuensche@inpe.br  
INPE – Divisão de Astrofísica**



# Introdução

- ☑ Universo homogêneo e isotrópico em escalas  $> 100$  Mpc
- ☑ Universo “encarçado” em escalas menores que 100 Mpc
- ☑ Universo inicialmente homogêneo (flutuações  $< 10^{-5}$ )
- ☑ A pergunta relevante é: como as flutuações de baixíssima amplitude ( $\delta\rho/\rho \ll 1$ ), e num regime linear na época da CMB, evoluíram para flutuações de grande amplitude e no regime completamente não-linear
- ☑ Definição de flutuações:

$$\rho(t) = \frac{1}{V} \int_V \rho(\vec{r}, t) d^3r \rightarrow \delta(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \bar{\rho}(\vec{r}, t)}{\bar{\rho}(\vec{r}, t)}$$

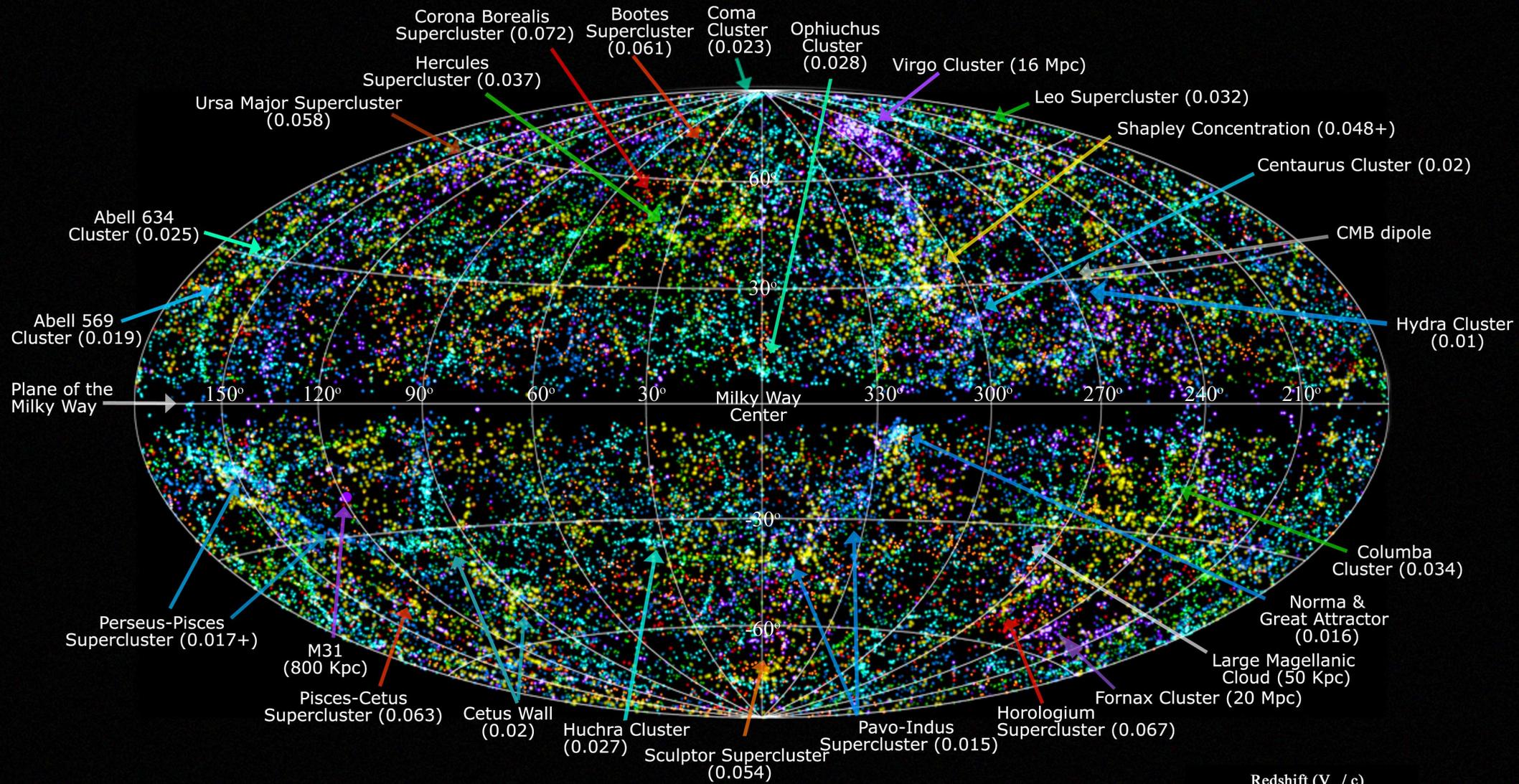
1



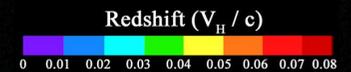
- ☑ Observações feitas com grandes levantamentos ópticos na década de 80 e 90 mapearam nosso Universo local
- ☑ Observações feitas já no Séc. XXI identificaram oscilações acústicas de bárions nesses levantamentos
- ☑ Distâncias típicas  $> 1000 \text{ Mpc}$  ( $z \gtrsim 0.2$ )
- ☑ Superestruturas (superaglomerados) e vazios, formam as chamadas estruturas de grande escala do Universo.
- ☑ As grandes estruturas do Universo aparentam uma forma semelhante a uma distribuição NEURONAL...
- ☑ Lembrem que, em cosmologia, a “unidade” são galáxias...



# 2MASS Redshift Survey



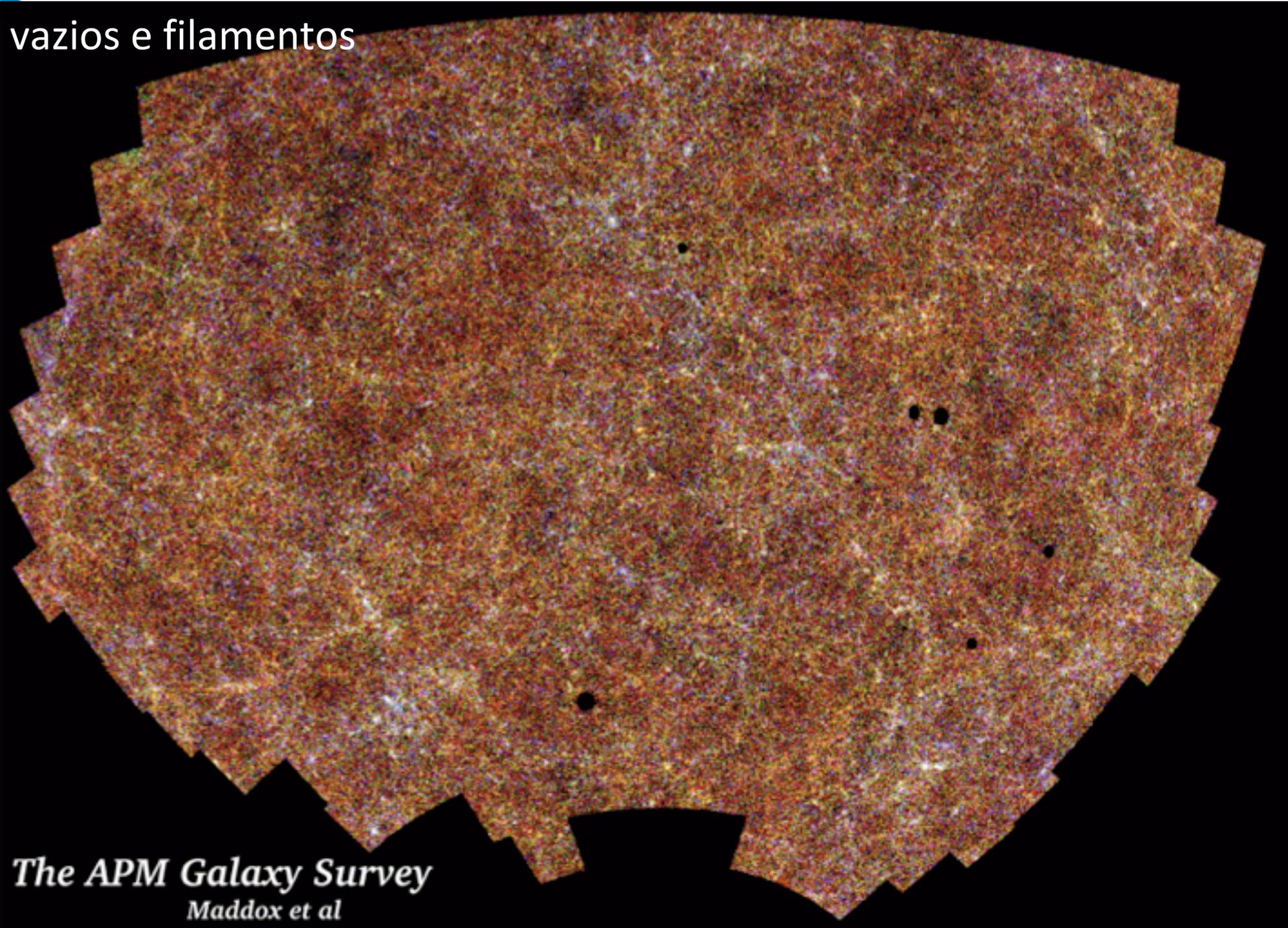
**Legend:** image shows 2MASS galaxies color coded by the 2MRS redshift (Huchra et al 2011); familiar galaxy clusters/superclusters are labeled (numbers in parenthesis represent redshift).



Graphic created by T. Jarrett (IPAC/Caltech)

Ref: <https://apod.nasa.gov/apod/ap110614.html>

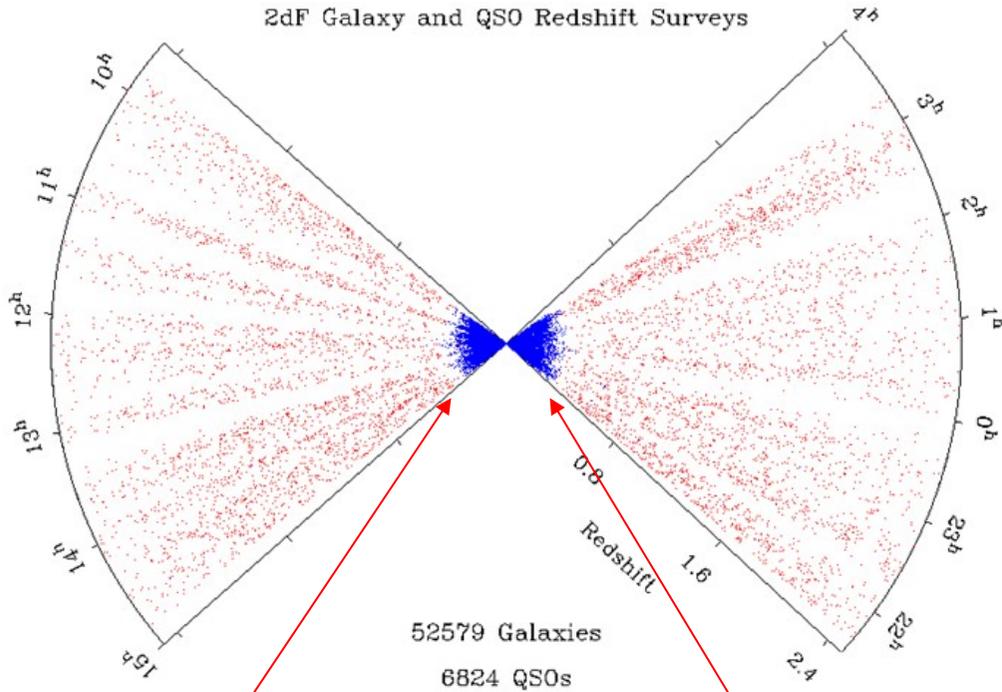
vazios e filamentos



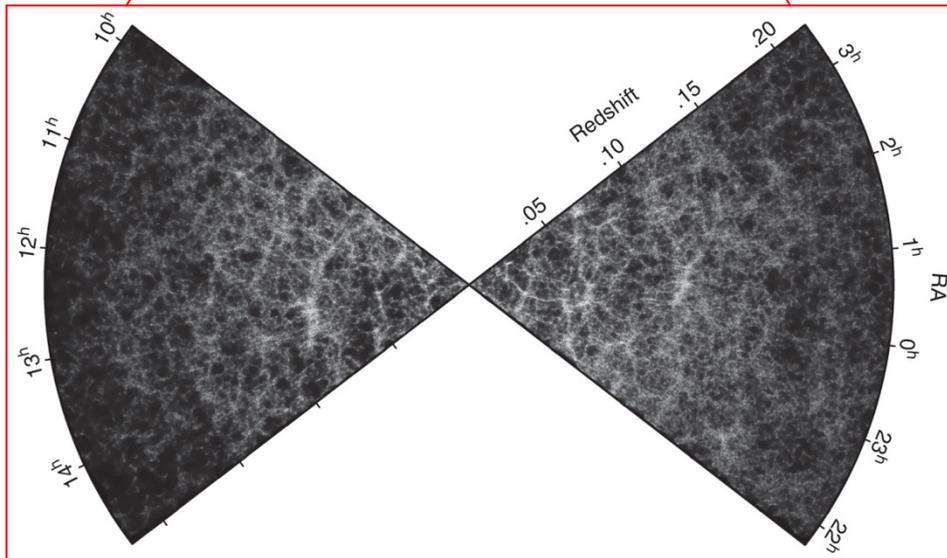
*The APM Galaxy Survey*  
Maddox et al

2dF Team

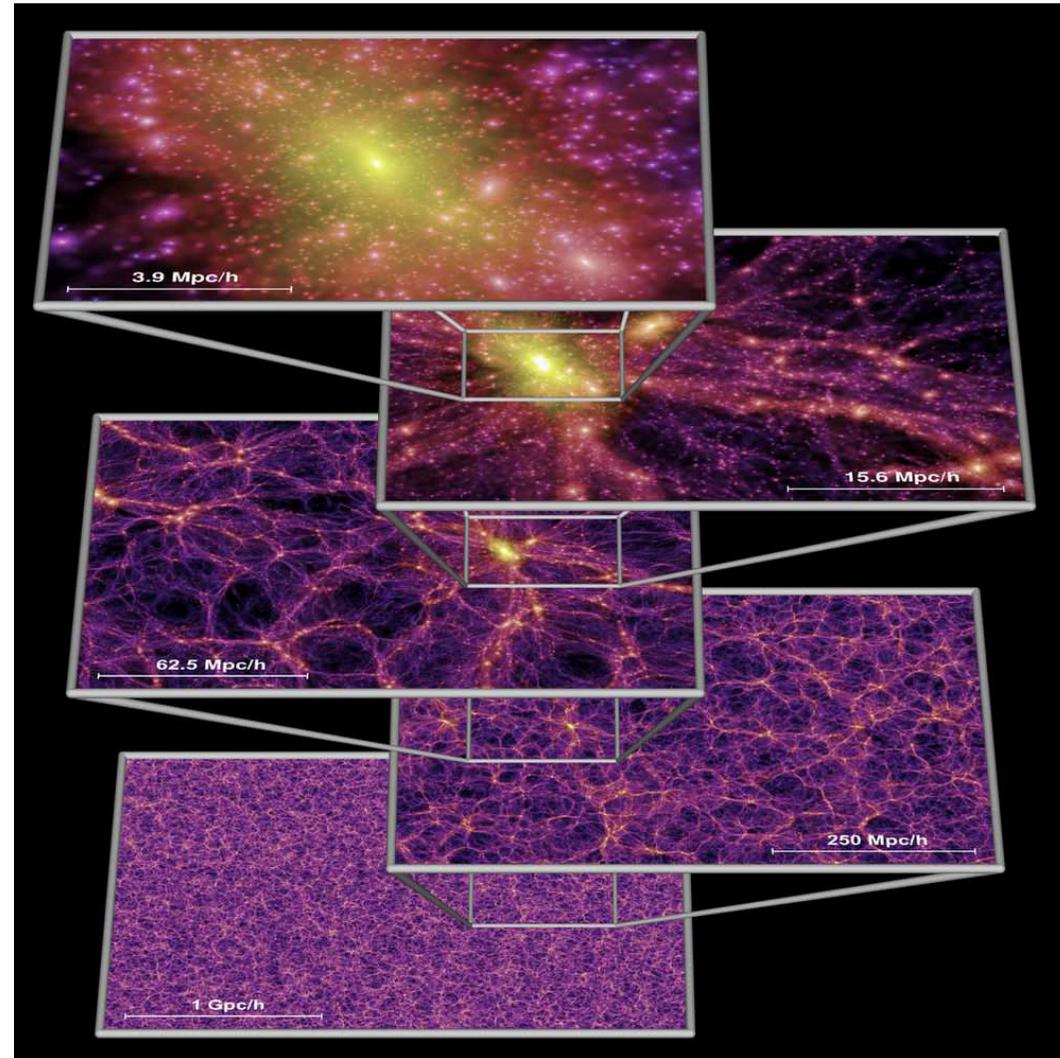
2dF Galaxy and QSO Redshift Surveys



52579 Galaxies  
6824 QSOs



Springer et al. (Nature 2005)





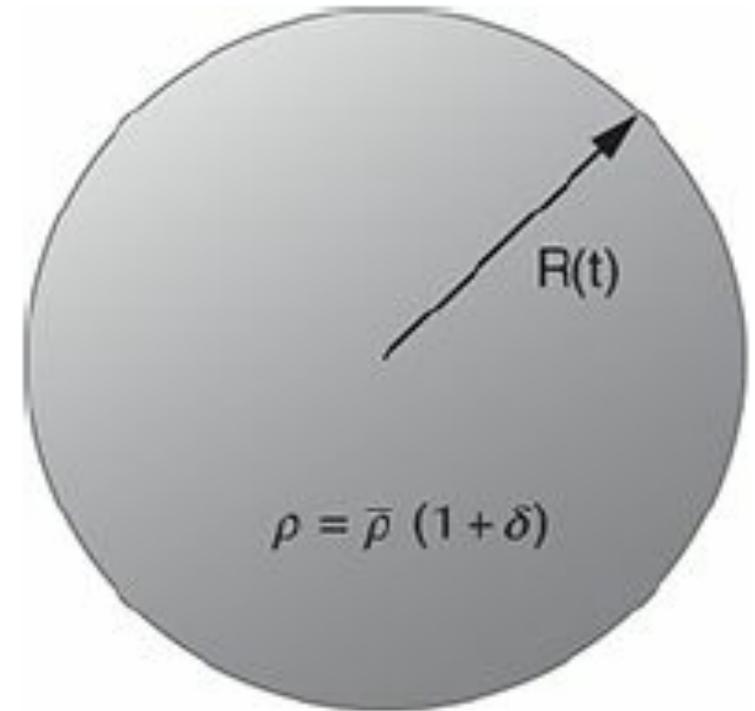
# O mecanismo de formação

- ☑ Instabilidades gravitacionais!!
- ☑ Regiões muito densas (“overdensities”) tem valores positivos na eq. (1), regiões rarefeitas (“underdensities”) tem valores negativos!
- ☑ Pequenas perturbações de densidade tendem a evoluir gravitacionalmente com o tempo, conforme o exemplo da B. Ryden.
- ☑ Uma esfera de gás (p.ex.) uniforme com uma flutuação de densidade uniforme colapsará por causa desse “excesso”.
- ☑ Esta presença de matéria no Universo observado foi a motivação de Einstein para introduzir a constante cosmológica e evitar o colapso.

$$\ddot{R} = -\frac{G(\Delta M)}{R^2} = -\frac{G}{R^2} \left( \frac{4\pi}{3} R^3 \bar{\rho} \delta \right) \quad 2$$



$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G \bar{\rho}}{3} \delta(t). \quad 3$$



Fonte: Introduction to Cosmology (B. Ryden)

A massa se conserva e o raio decresce, a partir do raio inicial  $R_0 = (3M/4\pi\bar{\rho})^{-1/3}$

$$M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} [1 + \delta(t)] R(t)^3,$$

$$R(t) = R_0 [1 + \delta(t)]^{-1/3},$$

$$4 \longrightarrow R(t) \approx R_0 \left[ 1 - \frac{1}{3} \delta(t) \right]. \quad 5$$

Aproximação para  $\delta \ll 1 \dots$

$$R(t) \approx R_0 \left[ 1 - \frac{1}{3} \delta(t) \right] \longrightarrow \ddot{R} \approx -\frac{1}{3} R_0 \ddot{\delta} \approx -\frac{1}{3} R \ddot{\delta}. \quad \boxed{6}$$

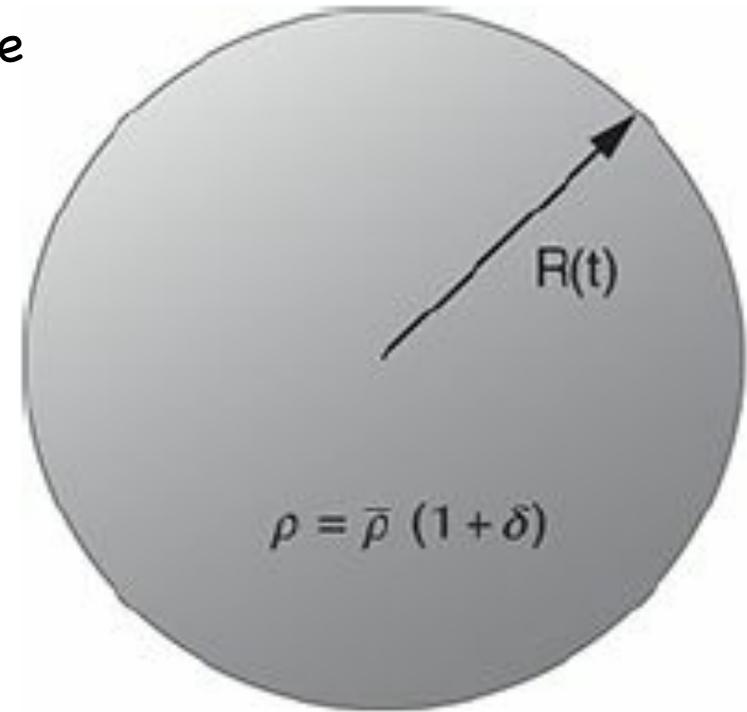
Substituindo de volta o valor da segunda derivada de  $R$ , teremos uma equação diferencial de 2a. ordem bem conhecida para as perturbações,

$$\frac{\ddot{R}}{R} \approx -\frac{1}{3} \ddot{\delta} \longrightarrow \ddot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} \delta. \quad \boxed{7}$$

cuja solução é uma combinação de exponenciais

$$\delta(t) = A_1 e^{t/t_{\text{dyn}}} + A_2 e^{-t/t_{\text{dyn}}},$$

$$t_{\text{dyn}} = \frac{1}{(4\pi G \bar{\rho})^{1/2}} \approx 9.6 \text{ hours} \left( \frac{\bar{\rho}}{1 \text{ kg m}^{-3}} \right)^{-1/2}. \quad \boxed{8}$$



Fonte: Introduction to Cosmology (B. Ryden)

Para o valor da densidade média do Universo,  $t_{\text{dyn}} \sim 3.64 \times 10^{17} \text{ s} = 11.55 \text{ Ganos...}$



# O critério de Jeans

- ☑ Existe uma dimensão típica de uma perturbação em um determinado meio, a partir da qual esse meio entrará em colapso, seguindo a solução da equação de movimento (eq. 8).
- ☑ A pressão interna desse meio contrabalança a pressão gravitacional, evitando o colapso!
- ☑ Perturbações menores que essa dimensão típica em geral são dissipadas sob o efeito da pressão interna (decaem exponencialmente) perturbações maiores crescem exponencialmente....



☑ Eqs. de movimento hidrodinâmico:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi \quad 9$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad 10$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad 11$$

$$P = \frac{\rho \kappa T}{\mu m_H} = v_s^2 \rho \quad 12$$



- Na condição de equilíbrio, supomos que:

$$\rho = \rho_0 = \text{const.}; \quad T = T_0 = \text{const.}; \quad \vec{v}_0 = 0. \quad \boxed{13}$$

- Perturbamos a condição de equilíbrio usando as relações abaixo, em que o subscrito 1 indica a quantidade perturbada.
- Ao substituir as grandezas perturbadas nas eqs. hidrodinâmicas, supomos perturbações isotérmicas e ignoramos termos não-lineares ou de segunda ordem (produto de duas grandezas perturbadas).

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$

$$P = P_0 + P_1$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$$

$$v = \vec{v}_1$$

14



☑ Obtemos então:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \left( \Phi_1 + v_s^2 \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1$$

15

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1$$

☑ que é um sistema de ED lineares homogêneas com coeficientes constantes, e que admite soluções do tipo

$$f(\vec{r}, t) \propto e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)}$$

16



☑ Nesse caso,

$$\frac{\partial}{\partial x} = i\kappa; \frac{\partial}{\partial t} = i\omega; \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

17

$$v_{1x} = v_1; v_{1y} = v_{1z} = 0$$

☑ E as eqs (14) tornam-se:

$$\omega v_1 + \frac{\kappa v_s^2}{\rho_0} \rho_1 + \kappa \Phi_1 = 0$$

18

$$\kappa \rho_0 v_1 + \omega \rho_1 = 0$$

$$4\pi G \rho_1 + \kappa^2 = 0$$



- ☑ A solução do sistema é a relação de dispersão:

$$\omega^2 = \kappa^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_0$$

19

- ☑ Duas soluções possíveis:

- ✓  $\kappa v_s^2 \gg 4\pi G \rho_0$

$$\omega^2 = \kappa^2 v_s^2$$

20

- ondas de pequenas amplitudes geram pequenos efeitos gravitacionais; pressão interna rapidamente restaura qualquer perturbação

- ✓  $\kappa^2 < \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2}$

21

- solução instável e pode crescer exponencialmente com o tempo, criando um desequilíbrio ( $\propto \exp(\pm i\omega t)$ )



- Definimos um número de onda ( $\kappa$ , conseqüentemente, um comprimento de onda) característico tal que seja possível separar as perturbações em instáveis e estáveis:

$$\kappa_J^2 \equiv \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \rightarrow \lambda_J = \frac{2\pi}{\kappa_J}$$

22

- Condição de instabilidade:  $\lambda > \lambda_J$**

- Critério de Jeans:

$$\lambda_J^2 = \left(\frac{\pi}{G \rho_0}\right)^{1/2} v_s^2$$

23

- Caso valha a condição de instabilidade, a solução das eqs. hidrodinâmicas é instável, dando início ao colapso.
- Para comprimentos de onda menores que  $\lambda_J$ , a pressão interna do meio restabelece o equilíbrio de forças, restituindo o sistema à condição de repouso.



# No caso cosmológico...

- ☑ O tempo característico em cosmologia é o tempo de Hubble ( $\sim 13,7$  Ganos...)
- ☑ A comparação com o tempo dinâmico calculado em (8) é da mesma ordem!!!! Prosseguimos então da seguinte forma
  - ✓ Calculamos  $\lambda_J$  para as componentes de radiação e matéria, antes e depois do desacoplamento
  - ✓ Vemos que, após desacoplar, a massa das estruturas cai drasticamente
  - ✓ O crescimento das perturbações só ocorre após o desacoplamento porque a escala de Jeans passa a ser maior do que a dimensão das estruturas
  - ✓ Também não há pressão suficiente para interromper o colapso, já que a matéria encontra-se num estágio não-relativístico.



Somente com componente radiativa,  $w=1/3$  e  $c_s = c\sqrt{w}$

No caso cosmológico...

$$\lambda_J = 2\pi\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\sqrt{w}\frac{c}{H} \rightarrow 3.0\frac{c}{H} \quad \boxed{24}$$

- Podemos calcular  $\lambda_J$  antes do desacoplamento e verificar o "tamanho" da escala nesse caso

$$\lambda_J(\text{antes}) = 3.0\frac{c}{H(z_{dec})} \approx 0.66\text{Mpc} \approx 2.0 \times 10^{22}\text{m} \quad \boxed{25}$$

- Imediatamente antes do desacoplamento, a densidade de bárions era  $5,6 \times 10^{-19} \text{ kg/m}^3$ , logo

$$M_J(\text{antes}) = \rho_b \frac{4\pi}{3} \lambda_J(\text{antes})^3 \approx 2 \times 10^{49} \text{ kg} \approx 10^{19} M_\odot \quad \boxed{26}$$

- Após o desacoplamento, fótons e bárions são fluidos separados e a velocidade do som em cada caso é diferente!

$$c_s(\text{foton}) = c/\sqrt{3} = 0.58c \approx 180.000\text{km/s} \quad \boxed{27}$$

$$c_s(\text{barion}) = \left(\frac{kT}{mc^2}\right)^{1/2}c \approx 1.5 \times 10^{-5}c \approx 5\text{km/s}$$

O desacoplamento implica no decréscimo do comp. de onda de Jeans para os bárions, por um fator  $F=0.58/1.5 \times 10^{-5} = 2.6 \times 10^{-5}$ !!!



- ☑ Considerações dimensionais correspondentes para a massa levam a um decréscimo da ordem de  $M^{1/3}$ , de forma que:

$$M_J(\text{depois}) = F^3 M_J(\text{antes}) = (2.6 \times 10^{-5})^{1/3} 10^{19} M_{\odot} \approx 2 \times 10^5 M_{\odot}$$

28

- ✓  $M \sim 10^{19} M_{\text{Sol}} \gg M_{\text{superclusters}}$
- ✓  $M \sim 10^5 M_{\text{Sol}} \ll M_{\text{gal. Anãs}}$
- ☑ Nenhuma perturbação conseguia crescer antes do desacoplamento por causa da pressão de radiação.
- ☑ Logo após o desacoplamento, a pressão de radiação cessou e a escala de massa das perturbações diminuiu drasticamente.
- ☑ **A formação de estruturas começa, provavelmente, em condensações de bárions da ordem de superaglomerados estelares!!!!**



# Instabilidade num Universo em expansão

- ☑ Adicionamos a complicação da expansão do Universo => causa adicional para reduzir as perturbações de densidade
- ☑ A solução anterior foi para um universo estático; considerar a expansão implica em considerar que, após o desacoplamento,  $\rho(t) \propto a^{-3}$ , pois já estamos na era de domínio da matéria;
- ☑ Nesse caso, “overdensities” podem tornar-se, com o passar do tempo, “underdensities” devido à expansão, **ao menos que a escala de tempo de crescimento de  $\delta$  seja mais curta que a escala de tempo da expansão!!!**



- ☑ A análise Newtoniana feita pela B. Ryden não leva em conta detalhes das perturbações na métrica. Partimos de uma perturbação de densidade na forma

$$\rho(t) = \bar{\rho}(t)[1 + \delta(t)], \text{ sendo que } \bar{\rho}(t) \propto a(t)^{-3}, |\delta(t)| \ll 1 \quad 29$$

- ☑ Replicando a análise do colapso de uma esfera, podemos escrever a aceleração na forma

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\left[\frac{4\pi G\bar{\rho}}{3} + \frac{4\pi}{3}G\bar{\rho}\delta\right] \quad 30$$

- ☑ A conservação de massa implica que o aumento da densidade significa um decréscimo do raio da perturbação, de acordo com:

$$M = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho}(t)[1 + \delta(t)]R(t)^3 \rightarrow R(t) \propto \bar{\rho}(t)^{-1/3}[1 + \delta(t)]^{-1/3} \quad 31$$

- ☑ E, como  $R \propto a^{-3}$ ,

$$R(t) \propto a(t)[1 + \delta(t)]^{-1/3} \quad 32$$

**A variação de R depende do sinal de  $\delta$**



- Derivando a eq. 31 duas vezes, teremos uma expressão análoga à eq. de Friedmann, mas considerando a perturbação ( $|\delta| \ll 1$ ), em vez da densidade.

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3}\ddot{\delta} - \frac{2}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\delta} \quad 33$$

- Essa perturbação, na análise relativística, também inclui termos ligados ao gauge e à perturbação da métrica. Combinando as eqs. 33 e 30, obtemos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3}\ddot{\delta} - \frac{2}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\delta} = -\frac{4\pi G\bar{\rho}}{3}(1 + \delta) \quad 34$$

- Se consideramos, na eq. 34, somente os termos perturbados, a eq. toma a forma

$$\frac{1}{3}\ddot{\delta} + \frac{2}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\delta} = \frac{4\pi G\bar{\rho}}{3}\delta \rightarrow \ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G\bar{\rho}\delta \quad 35$$

$$\ddot{\delta} = 4\pi G\bar{\rho}\delta \quad 36$$

Universo estático

- ☑ O cálculo relativístico também substitui  $\rho$  por  $\varepsilon_m$ , permitindo considerar diferentes componentes do inventário cósmico

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \frac{4\pi G}{c^2} \bar{\varepsilon}_m \delta \quad 37$$

- ☑ lembrando que  $\varepsilon_m$  é uma pequena fração da densidade total de matéria-energia.
- ☑ Reescrevendo  $\varepsilon_m$  em função do parâmetro de densidade para a matéria, obtemos:

$$\Omega_m = \frac{\bar{\varepsilon}_m}{\varepsilon_c} = \frac{8\pi G \bar{\varepsilon}_m}{3H^2 c^2} \quad 38$$

- ☑ E podemos reescrever a eq. 37 em função de 38, chegando à uma forma em que os termos de “expansão” e “amortecimento” aparecem claramente na equação.

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \left(\frac{4\pi G}{c^2}\right) \left(\frac{3H^2 c^2 \Omega_m}{8\pi G}\right) \delta \quad 39$$

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2} H^2 \Omega_m \delta = 0 \quad 40$$



- ✓ As perturbações da matéria só podem crescer significativamente quando a dinâmica é dominada pela matéria.
- ✓ Para tempos  $\ll t_{\text{rad-mat}}$ ,  $\Omega_m \ll 1$  e  $H = (1/2t)$ , de forma que a eq. 40 tem uma forma mais simples e a solução de crescimento não é tão rápida:

$$\ddot{\delta} + (1/t)\dot{\delta} \approx 0$$

41

$$\delta(t) \approx B_1 + B_2 \ln(t)$$

42

- ✓ Num universo dominado por energia escura ( $t \gg t_{\text{mat-EE}}$ ) o crescimento será exponencial, uma vez que a solução da eq. 43 é a exponencial 44

$$\ddot{\delta} + 2H_\Lambda \dot{\delta} \approx 0$$

43

$$\delta(t) \approx C_1 + C_2 e^{-2H_\Lambda t}$$

44

- ✓ Para um universo dominado por energia escura, as perturbações atingem um valor constante  $C_1$  enquanto a densidade média cai com  $\exp(-3H_\Lambda t)$



- ☑ Somente num universo dominado por matéria as perturbações pode crescer em uma taxa significativa, de forma a formar as estruturas que conhecemos.
- ☑ Num hipotético Universo dominado por matéria,  $\Omega_m = 1$  e  $H = (2/3t)$ , de forma que

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0$$

45

- ☑ Essa ED pode ser resolvida com uma solução do tipo  $\delta \propto Dt^n$ , de forma que caímos em uma eq. algébrica em n:

$$n(n-1)Dt^{n-2} + \frac{4}{3t}nDt^{n-1} - \frac{2}{3t^2}Dt = 0$$

46

$$n(n-1) + \frac{4}{3t}n - \frac{2}{3} = 0$$

47

- ☑ As soluções para a eq. 47 são  $n=1$  e  $n=2/3$ . Dessa forma, voltando para a expressão de  $\delta$ , teremos:

$$\delta(t) = D_1 t^{2/3} + D_2 t^{-1}$$

48

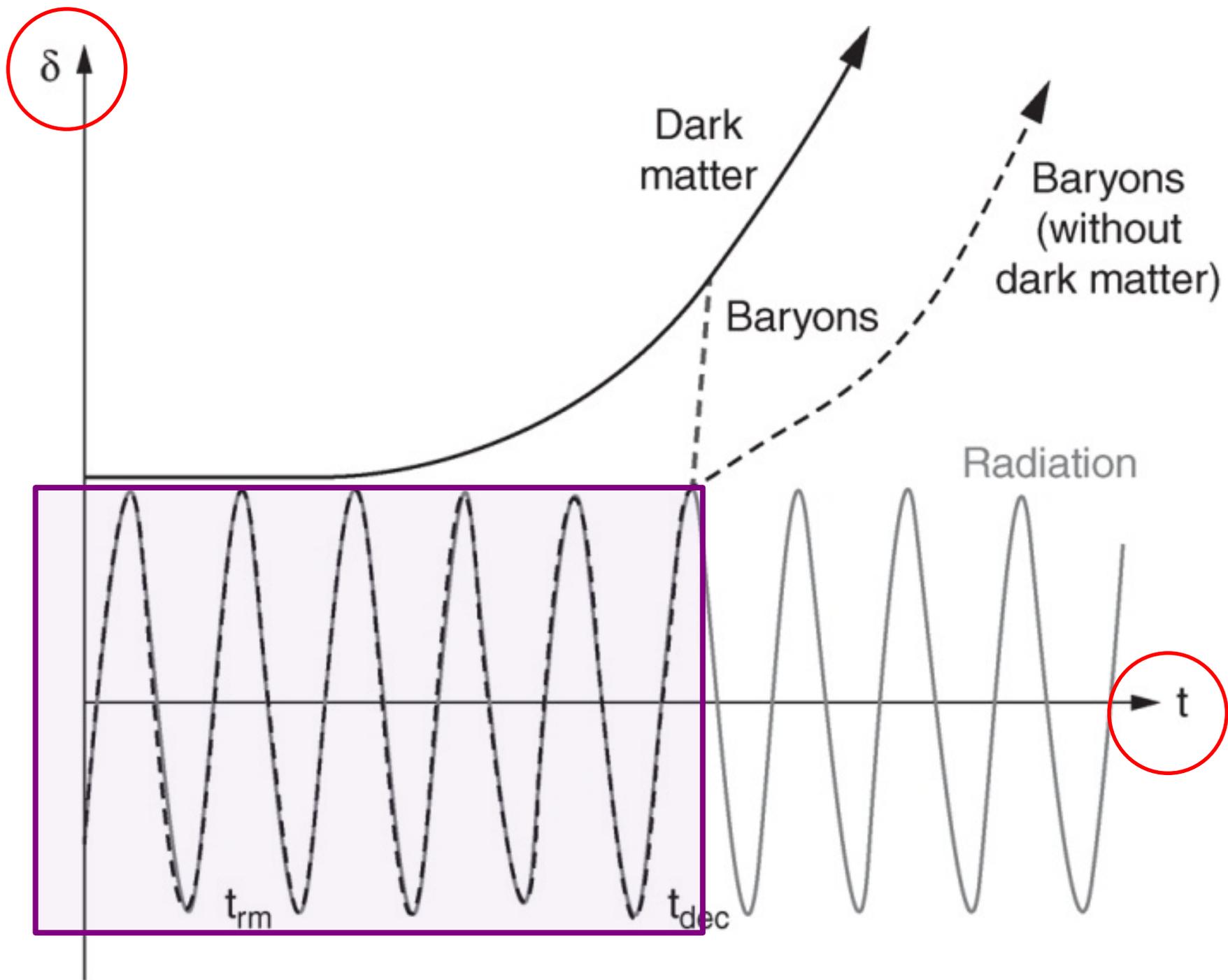


- ☑ A solução que cresce (lentamente) com o tempo é proporcional a  $2/3$  e temos a seguinte dependência:

$$\delta(t) \propto t^{2/3} \propto a(t) \propto \frac{1}{1+z}$$

49

- ☑ Se as perturbações bariônicas fossem as únicas a evoluir a partir da época da matéria, elas só poderiam começar a crescer a partir de  $z = 1090$ , que foi a época do desacoplamento...
- ☑ Entretanto, bem antes dessa época, em  $z=3440$ , quando a matéria passou a dominar a dinâmica, as perturbações de **matéria escura** começaram a crescer!!!
- ☑ Isso permitiu que, quando perturbações de bárions puderam evoluir, elas “pegaram uma carona”, caindo nos poços de potencial das perturbações de matéria escura que já estavam em andamento.



Oscilações do fluido fóton-bárion

Fonte: Introduction to Cosmology (B. Ryden)



# O espectro de potência

- ☑ As perturbações de densidade no Universo jovem (antes do desacoplamento) encontravam-se no regime linear ( $|\delta| \ll 1$ )
- ☑ A métrica em que essas perturbações evoluíram é a usual (Robertson-Walker).
- ☑ Podemos considerar um sistema de coordenadas e adotar uma origem qualquer.
- ☑ Nessas condições de expansão, a distância própria até qualquer ponto da origem é dada por  $d_p(t_i) = a(t_i)r$ .



- ☑ R seria a distância própria hoje, quando  $a(t)=1$ , se a expansão continuasse isotrópica.
- ☑ Consideramos cada perturbação de forma independente, e, desde que o regime linear seja mantido, podemos alterar  $t_i$ , sem alterar sua forma. A única alteração é na amplitude...
- ☑ Da mesma forma que nas medidas de CMB, o que interessa é a distribuição estatística das “over” e “underdensities”.
- ☑ Para a distribuição de estruturas, a ideia é a mesma, só que num volume, enquanto a CMB é projetada numa casca



- ✓ A decomposição das perturbações  $\delta(\vec{r})$  pode ser feita no espaço 3D (ou 4D), em termos de suas componentes de Fourier, dadas por:

$$\delta(\vec{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta_k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \leftrightarrow \delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int d^3r \delta(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

50

- ✓ Essa decomposição transforma as perturbações em infinitos modos senoidais de comprimento de onda  $\lambda=2\pi/k$ , correspondente a números de onda co-móveis  $\vec{k}$ .
- ✓ **O conhecimento completo de  $\delta(\vec{r})$  permite o cálculo de todos os modos de Fourier  $\delta_{\vec{k}}$  (representado pela quantidade complexa  $\delta_{\vec{k}} = |\delta_{\vec{k}}|e^{i\phi_{\vec{k}}}$ )**
- ✓ **Analogamente, o conhecimento de todos os modos de perturbação  $\delta_{\vec{k}}$  permite a reconstrução completa do campo de flutuações de densidade  $\delta(\vec{r})$**



- ☑ Quando  $|\delta_{\vec{k}}| \ll 1$ , os modos de Fourier obedecem a eq. 40, desde que o comprimento de onda próprio  $a(t) 2\pi/k$  seja grande comparado a  $\lambda_J$  e pequeno em relação ao comprimento de Hubble  $c/H$ .
- ☑ A fase permanece constante enquanto  $|\delta_{\vec{k}}| \ll 1$ .
- ☑ Diferentes modos de Fourier atingem a fase  $|\delta_{\vec{k}}| \sim 1$  em diferentes épocas; isso significa que modos com  $\lambda$  da ordem  $c/H(z)$  desacoplaram da expansão num redshift  $z$  e entraram num regime não-linear, crescendo rapidamente.
- ☑ Isso significa que é possível usar a teoria de perturbações lineares para estudar os modos de comprimento de onda muito grandes (da ordem de uma fração de  $c/H$ ), correspondentes às maiores estruturas do Universos, mesmo depois que modos muito menores já desacoplaram e entraram no regime não-linear

- ✓ A amplitude média das flutuações das perturbações de densidade é dada por

$$P(\vec{k}) = \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle$$

51

- ✓ em que a média é tomada em todas as orientações possíveis de  $k$ . Se  $\delta(\vec{r})$  é isotrópico, não há perda de informação, estatisticamente falando.
- ✓ Essa média equivale à remoção do termo  $e^{\pm im\phi}$  no cálculo do espectro de potência da CMB.

$$C_l = \frac{1}{2l + 1} \langle |a_{lm}|^2 \rangle$$

52

- ✓ Quando as fases de  $\phi_{\vec{k}}$  são não correlacionadas, o campo de perturbações pode ser descrito por um função de distribuição de probabilidades gaussiana (campo gaussiano), o que equivale a dizer que, se esse campo gaussiano é homogêneo e isotrópico, todas as suas propriedades estatísticas estão representadas no espectro de potência  $P(k)$ .



- ☑ Quando as fases de  $\phi_{\vec{k}}$  são correlacionadas, o campo de perturbações deixa de ser gaussiano e momentos de ordem superior dessa função de distribuição são necessários para descrever o campo de perturbações.
- ☑ Nesse caso, quantidades conhecidas como “bispectro” e “trispectro” são utilizadas para a análise dos campos não-gaussianos.
- ☑ A função de probabilidade gaussiana e sua respectiva variância são dadas por

$$p(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_\delta^2}\right)$$

53

$$\sigma_\delta^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(k) d^3k = \frac{V}{2\pi^2} \int P(k) k^2 dk$$

54

- ☑ O espectro primordial de flutuações de densidade deve uma forma gaussiana, previsto pela teoria inflacionária, com pequenos desvios de gaussianidade em alguns casos.

- ☑ A inflação prevê um espectro de potência que tenha a forma do chamado espectro de Harrison-Zeldovich (ou HZ), também chamado "INVARIANTE EM ESCALA".

$$P(k) \propto k^n$$

55

- ☑ Em que  $n = 1$  (teoricamente).
- ☑ Resultados recentes da colaboração Planck 2018 (e alguns outros) indicam um pequeno desvio do espectro, pois  $n=0.97$ .
- ☑ B. Ryden discute como seria o Universo descrito pelo espectro  $P(k) = k^n$ 
  - ✓ A massa média de diversas esferas aleatoriamente localizadas e definidas pelo raio co-móvel  $r$  seria dada por

$$\langle M \rangle = (4\pi/3)r^3 \rho_{m,0} = 1.67 \times 10^{11} M_{\odot} \left(\frac{r}{1 \text{ Mpc}}\right)^3$$

56

- ✓ A massa real flutuaria em torno de  $\langle M \rangle$ , de acordo com:

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \frac{M - \langle M \rangle}{\langle M \rangle} \right)^2 \right\rangle &= \frac{V}{2\pi^2} \int P(k) \left[ \frac{3j_1(kr)}{kr} \right]^2 k^2 dk \\ &= \frac{9V}{2\pi^2 r^2} \int P(k) j_1(kr)^2 dk \end{aligned}$$

57

Função esférica de Bessel =>  $(\sin x - x \cos x)/x^2$



- Se soubermos a forma de  $P(k)$ , podemos calcular as flutuações de densidade de massa. Usando a forma  $P(k) \propto k^n$  (e fazendo a substituição de variáveis  $u=kr$  na eq. 57) obtemos:

$$\frac{\delta M}{M} = \left\langle \left( \frac{M - \langle M \rangle}{\langle M \rangle} \right)^2 \right\rangle^{1/2} \propto r^{-(3+n)/2} \propto M^{-(3+n)/6}$$

58

- Usando argumentos que justificam a distribuição de Poisson para pontos de massa  $M$ , aleatórios e espalhados pelo Universo, é possível justificar que as flutuações de massa  $\propto N^{-1/2} \propto M^{-1/2}$ , característico de uma distribuição de Poisson.
- A expressão obtida com  $n=0$  contrasta com a expressão para o espectro de Harrison-Zeldovich ( $n=1$ ).
- Conclusão: o espectro de HZ produz mais flutuações do que um espectro que obedece a uma distribuição de Poisson!!!



- ✓ As flutuações de densidade associadas à flutuações de massa  $M$  numa escala  $r$  (co-móvel) terá uma amplitude proporcional à variação do campo gravitacional produzido por essa distribuição:

$$\delta\Phi \sim GM\delta/r \propto \delta M/M^{1/3} \propto M^{(1-n)/6}$$

59

- ✓ O espectro HZ, com  $n=1$ , é o único formato que impede divergências no espectro em pequenas escalas (perturbações crescem um pouco mais do que cresceriam em uma distribuição de Poisson) e as perturbações gravitacionais são estáveis para  $n=1$  em escalas em que  $r$  pode ser arbitrariamente grandes.
- ✓ Essa é a origem do termo "INVARIANTE EM ESCALA"!



# Matéria Escura Quente x Fria

- Os termos referem-se às energias relativística (quente) e não relativística (fria) => **Cold Dark Matter - CDM e Hot Dark Matter - HDM**
- Matéria relativística demora a colapsar...
- A presença de matéria escura quente pode alterar o espectro das perturbações de densidade.
- Se consideramos um Universo somente com matéria escura quente, ela irá resfriando à medida que o Universo expande, e sua energia seja da ordem de  $3kT \approx m_h c^2$ :

$$T_h = \frac{m_h c^2}{3k} \approx 12000K \left( \frac{m_h c^2}{3eV} \right)$$

60

- Que corresponde a uma época

$$t_h \approx 42000 \left( \frac{m_h c^2}{3eV} \right)^{-2} \text{ anos}$$

61

- ☑ Em momentos anteriores a  $t_h$ , partículas de HDM transitavam livremente com velocidades  $\sim c$ , em um processo chamado *free streaming*, dissolvendo as perturbações de densidade.
- ☑ Quando a HDM finalmente torna-se não-relativística, não há mais perturbações de densidade em escalas menores do que a escala física

$$d_{min} \approx ct_h \approx 13 \left( \frac{m_h c^2}{3eV} \right)^{-2}$$

62

- ☑ Correspondendo a uma escala co-móvel

$$r_{min} = \frac{d_{min}}{a(t_h)} \approx \left( \frac{T_h}{2.7255 K} \right) d_{min} \approx 55 \left( \frac{m_h c^2}{3eV} \right)^{-1} \text{ Mpc}$$

63

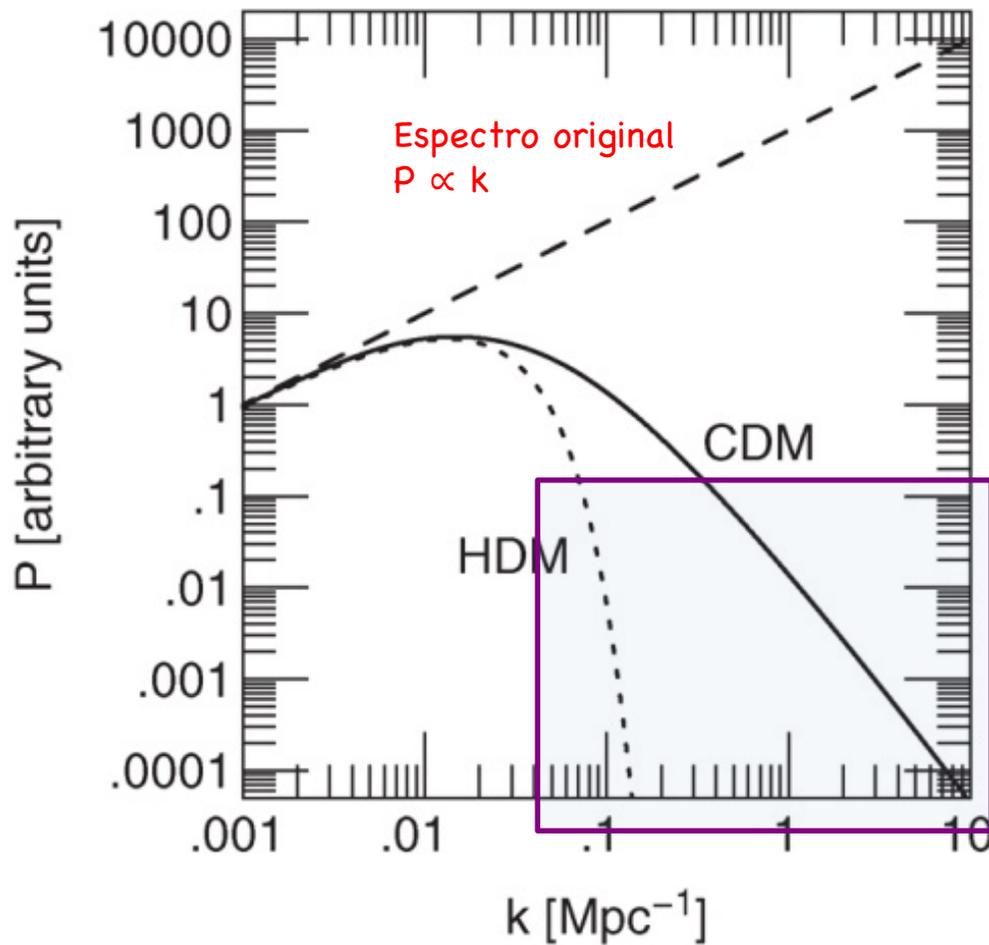
- ☑ E uma massa que cabe dentro de uma esfera de raio co-móvel  $r_{min}$  é:

$$M_{min} = \frac{4\pi}{3} \rho_{m,0} r_{min}^3 \approx 2.7 \times 10^{16} M_{\odot} \left( \frac{m_h c^2}{3eV} \right)^{-3}$$

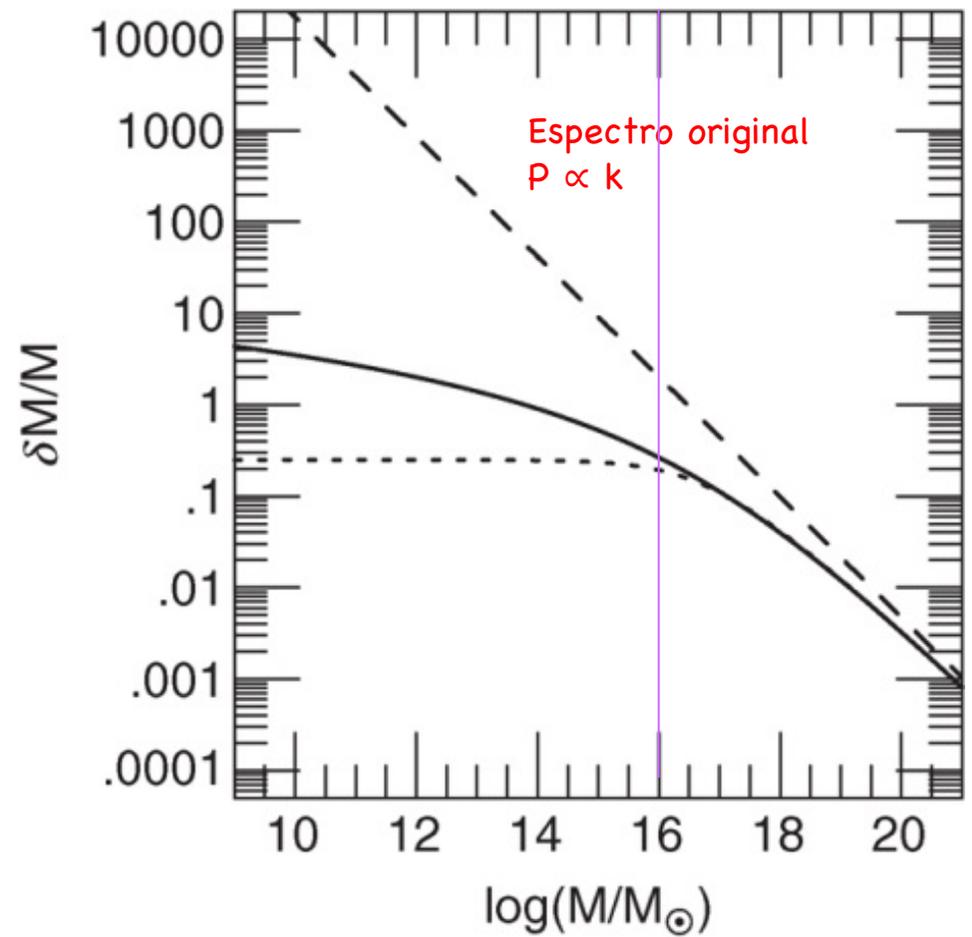
64

☑ Como referência:

- ✓ partículas de HDM com  $m_h c^2 \approx 50$  eV dissolvem flutuações da escala de tamanho do grupo local
- ✓ partículas de HDM com  $m_h c^2 \approx 8$  eV dissolvem flutuações da escala de tamanho do aglomerado de Coma
- ✓ partículas de HDM com  $m_h c^2 \approx 3$  eV dissolvem flutuações da escala de tamanho pouco menor que superaglomerados



Free streaming causa supressão de potência em números de onda  $\gg 0.1$  ( $\lambda \ll 55$  Mpc)



Para HDM, as flutuações de massa estabilizam em  $10^{16} M_{\text{Sol}}$ , indicando que não há colapso de estruturas com massas menores.

**No caso de HDM, estruturas maiores formam-se primeiro e as menores seguem, por fragmentação (modelo de formação "TOP-DOWN")**



- ☑ Se o Universo fosse constituído principalmente por HDM, seria esperado que estruturas maiores fossem formadas primeiro, de forma que superaglomerados, fossem as estruturas mais velhas, seguidas de aglomerados e depois as galáxias....
- ☑ Entretanto, observamos o oposto!
- ☑ Isso significa que a matéria escura que começou o processo de amplificação das perturbações de densidade deve ser **CDM e não HDM!**
- ☑ Flutuações crescem numa determinada época se o comprimento de onda das perturbações for maior do que  $c/H$ . Isso não afeta o crescimento das perturbações CDM **nem mesmo na era dominada pela radiação.**



☑ Exemplo: WIMPS

✓ Desacoplamento:  $t = 1s$  (neutrinos, p. ex.)

✓  $a_d = 3 \times 10^{-10}$

✓  $c/H = 2ct_d = 6 \times 10^8 \text{ m}$

✓ Escala de comprimento co-móvel:  $r_d = 2ct_d/a_d = 60 \text{ Mpc}$

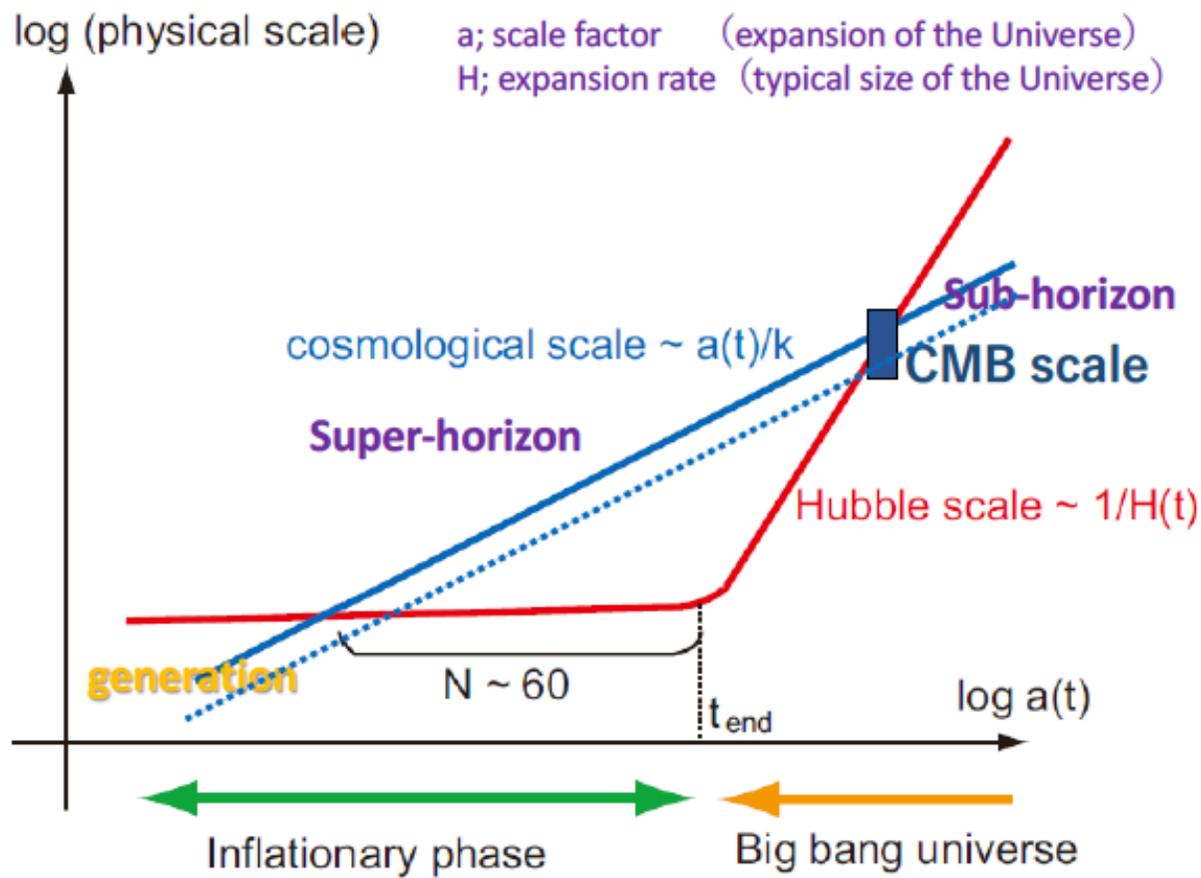
✓ Massa da perturbação:  $M_d = 4\pi/3 r_d^3 \rho_{m,0} \sim 0.05 M_{\text{Sol}}$

✓  $k_d \sim 2\pi/r_d \sim 10^5 \text{ Mpc}^{-1}$

☑ Perturbações com  $k < k_d$  e  $M > M_d$  vão crescer enquanto suas escalas de comprimento forem  $> c/H!$

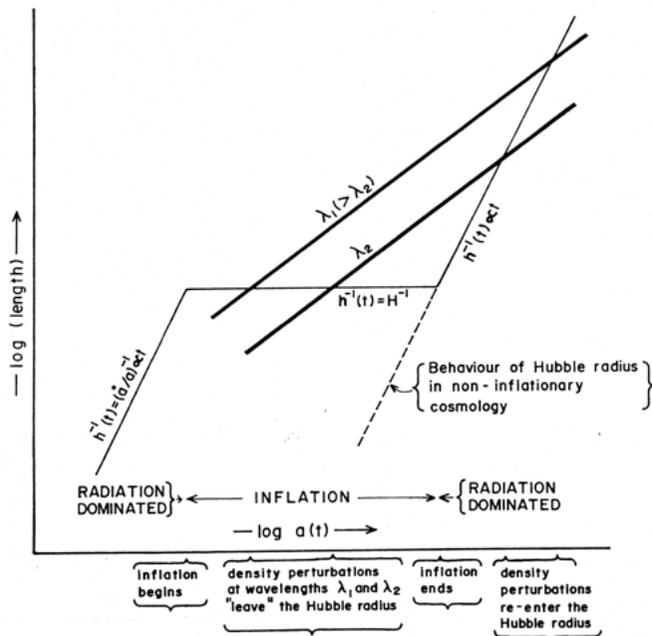


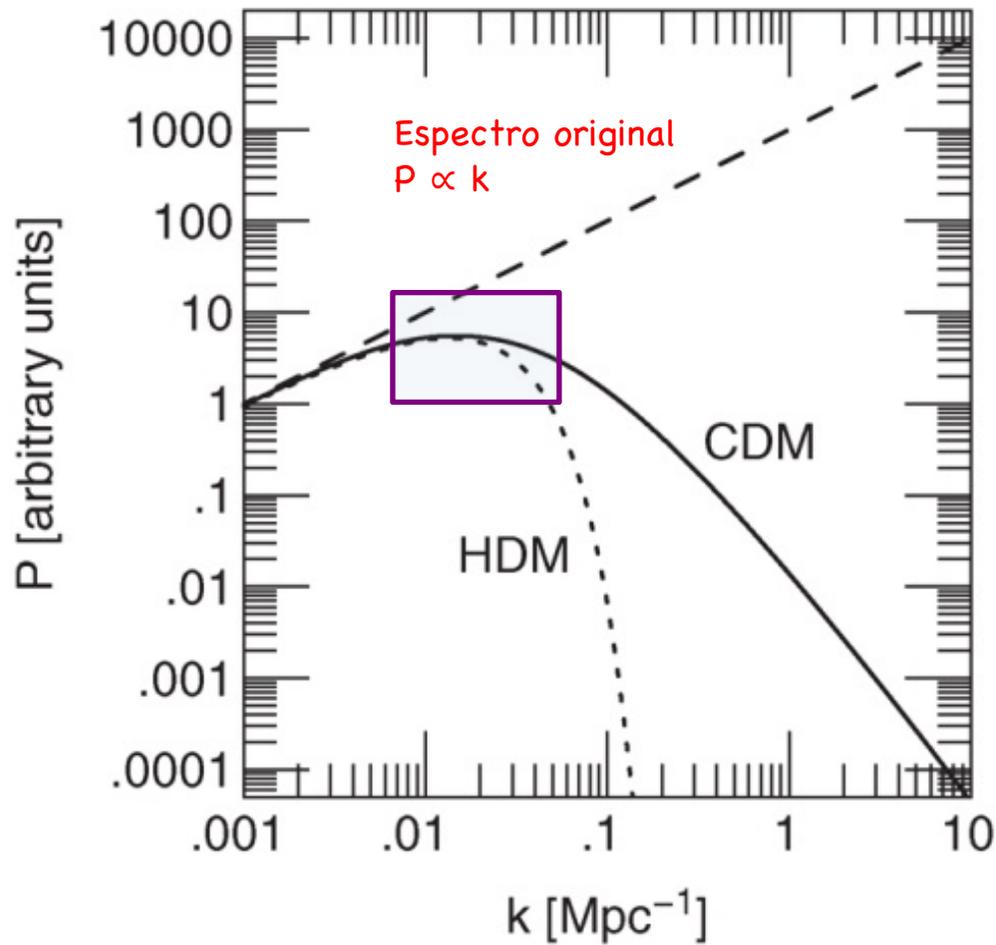
- ☑ E o que ocorre quando as perturbações são menores do que  $c/H$ ?
  - ✓ Depende se a transição ocorre antes ou depois da transição da era da radiação  
 $\Rightarrow$  era da matéria ( $t = 50.000$  anos,  $a_{rm}=2.9 \times 10^{-4}$ )
  - ✓ No exemplo da B. Ryden, ela considera uma escala co-móvel de raio 90 Mpc, comparada a um raio de Hubble  $c/H = 1.8 ct_{rm}=0.027$ , na época da transição radiação-matéria.
- ☑ Para essa escala, temos  $M_{rm}=1.3 \times 10^{17} M_{Sol}$  e  $k_{rm}=2\pi/r_{rm}=0.07 \text{ Mpc}^{-1}$
- ☑ Perturbações com  $r > r_H$  vão crescer continuamente enquanto essa condição permanecer, mesmo na era da radiação.
- ☑ Perturbações de CDM com  $k_d > k > k_{rm}$  crescerão somente até que elas “entrem” na escala do raio de Hubble, ou seja, quando seu comprimento físico real  $a(t) \propto t^{1/2}$  for menor que  $c/H \propto t$
- ☑ Nesse momento as perturbações “congelam” e somente passam a evoluir novamente após  $t > t_{rm}$



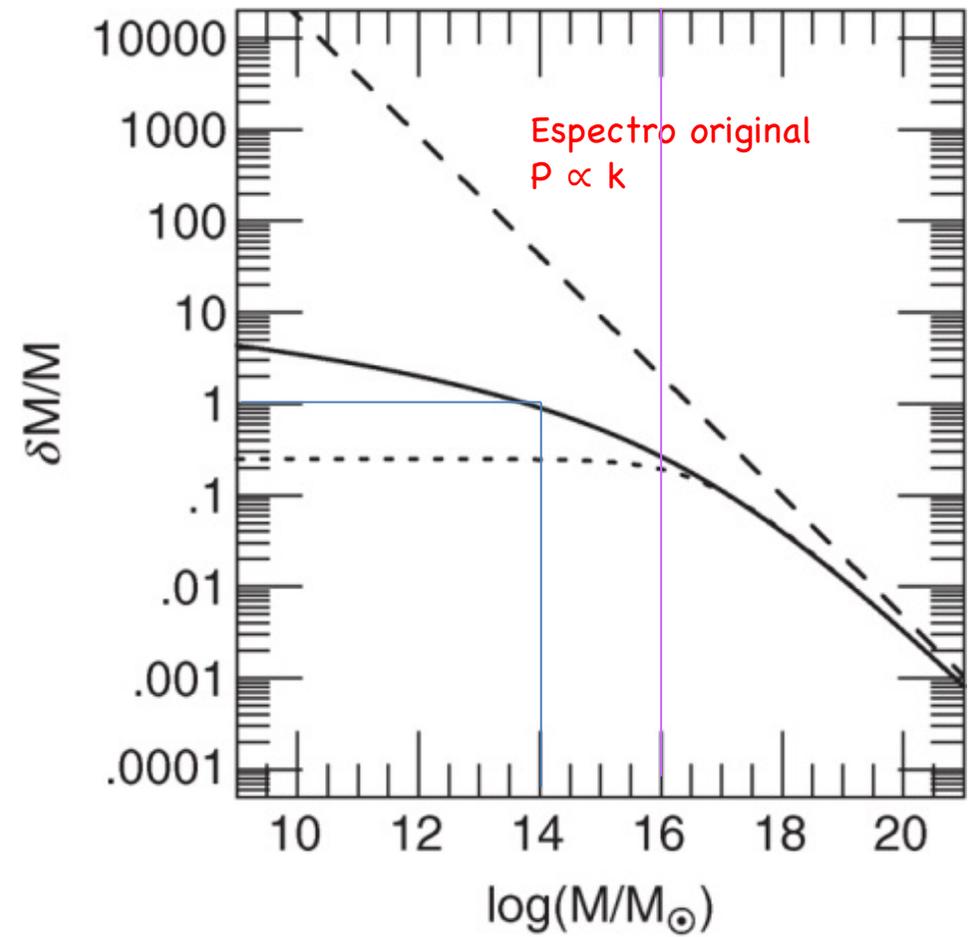
Quantum fluctuations (causal) are stretched by inflationary expansion  
 →  
 “classical” super-horizon (acausal) fluctuations (basically determined at the horizon exit)  
 →  
 primordial fluctuations with different scales (wavenumber) would bring us the information of different stages of inflation !!

Fonte: [http://ska-jp.org/ws/file2019/SKA\\_2019\\_Yokoyama.pdf](http://ska-jp.org/ws/file2019/SKA_2019_Yokoyama.pdf)





Máximo em cerca de  $0.03 \text{ Mpc}^{-1}$ , com o espectro de potência estendendo-se até os maiores números de onda (menores  $\lambda$ )



Para CDM, as flutuações de massa começam para massas menores, correspondendo a  $k$  maiores no lado esquerdo.

$\delta M/M=1$  para  $M=10^{14} M_{\text{Sol}}$  é uma normalização para ajuste às observações atuais em grandes escalas, quando ainda temos formação das maiores estruturas ( $\delta M/M < 1$ )

No caso de CDM, estruturas menores formam-se primeiro e as maiores seguem, por aglutinação gravitacional (modelo de formação "BOTTOM-UP")



☑ Resumo da situação:

- ✓ O Universo prefere CDM!
- ✓ Entretanto, ainda existe uma pequena fração de neutrinos relativísticos que contribui com  $< 1\%$  de HDM ( $\Omega_{\text{HDM},0} \sim 0.007$ )
- ✓ O modelo padrão é normalmente chamado de  $\Lambda$ CDM em função de suas componentes predominantes

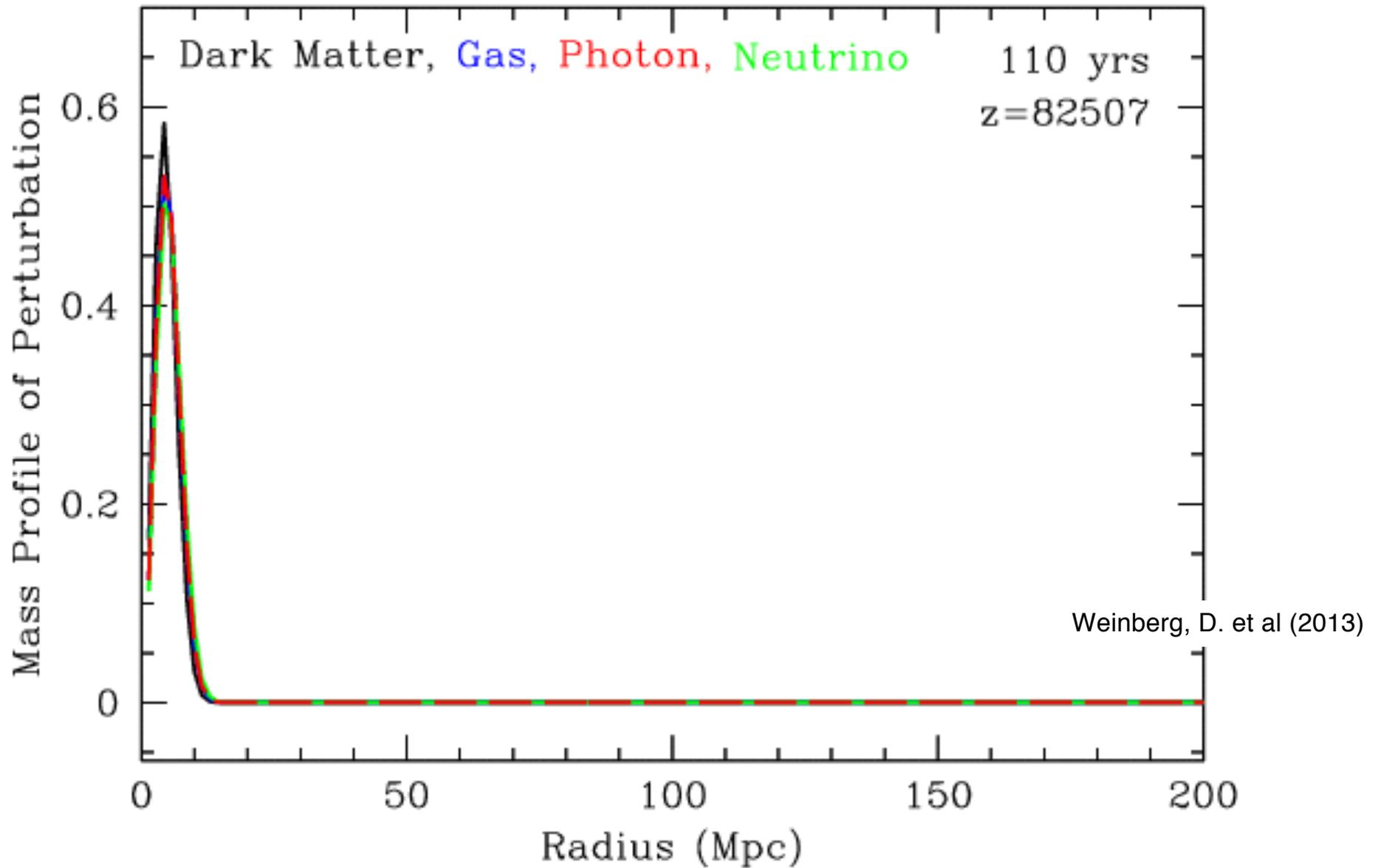


# Oscilações acústicas de bárions

- ❑ Oscilações associadas às oscilações de fluido, durante o acoplamento matéria-radiação, anterior à formação da CMB
- ❑ A capacidade de bárions interagirem com fótons, possibilitando o resfriamento de estruturas e o conseqüente aumento de eficiência no processo de colapso gravitacional, desempenha um papel interessante na formação de estruturas, tanto na escala de galáxias quanto na escala estelar
- ❑ Os efeitos dessa capacidade de resfriamento em escalas maiores do que superaglomerados aparecem no espectro de potência na forma de um pequeno pico em  $P(k)$ , onde ocorre um excesso na flutuação de densidade; esses são os BAO



The evolution of perturbations for various cosmic components, in different cosmic times.



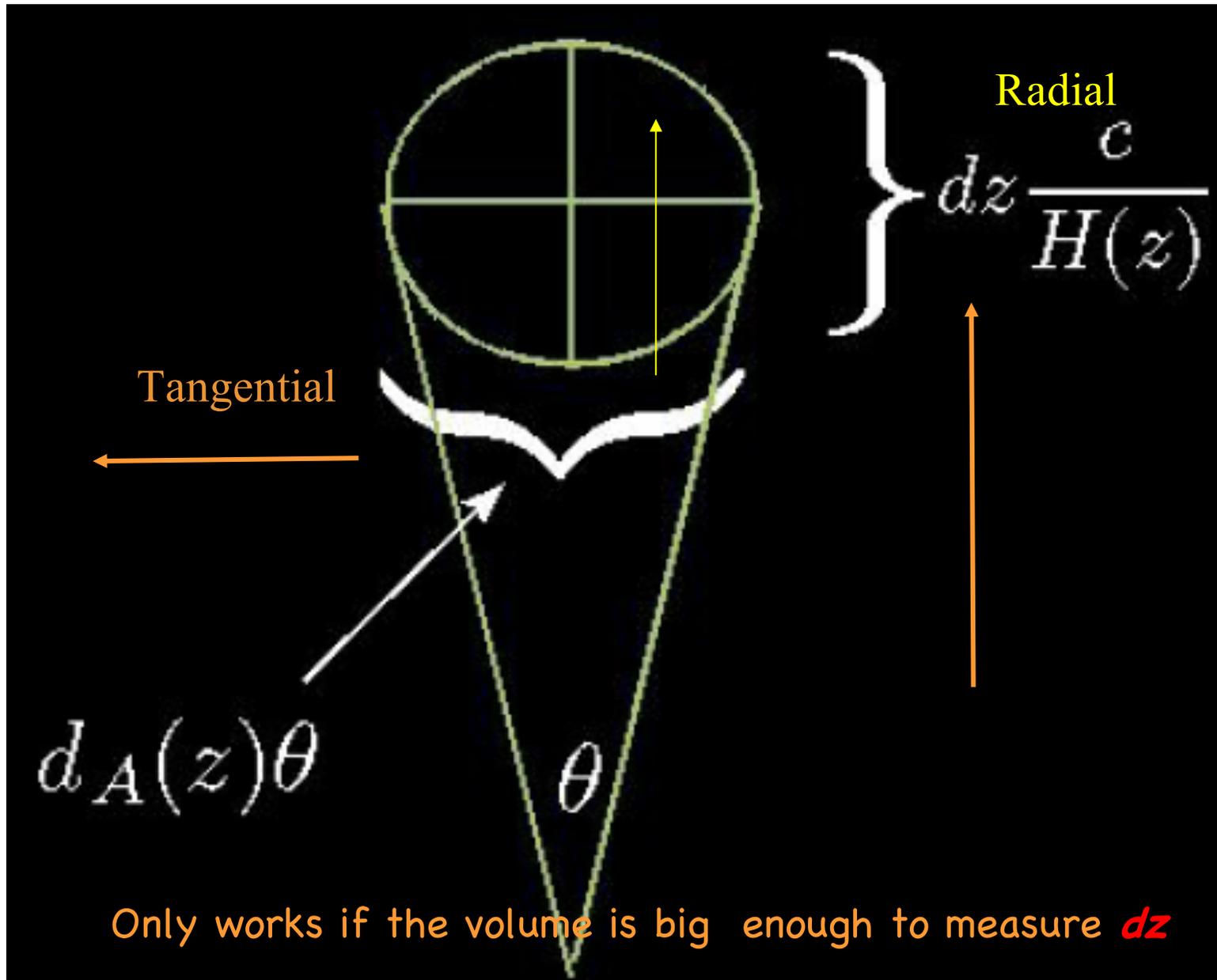
After decoupling there is a wave of matter and dark matter, which will gravitationally converge to a common radius.

Animation: <http://burro.case.edu/Academics/Astr328/Notes/StructForm/BAO.html>



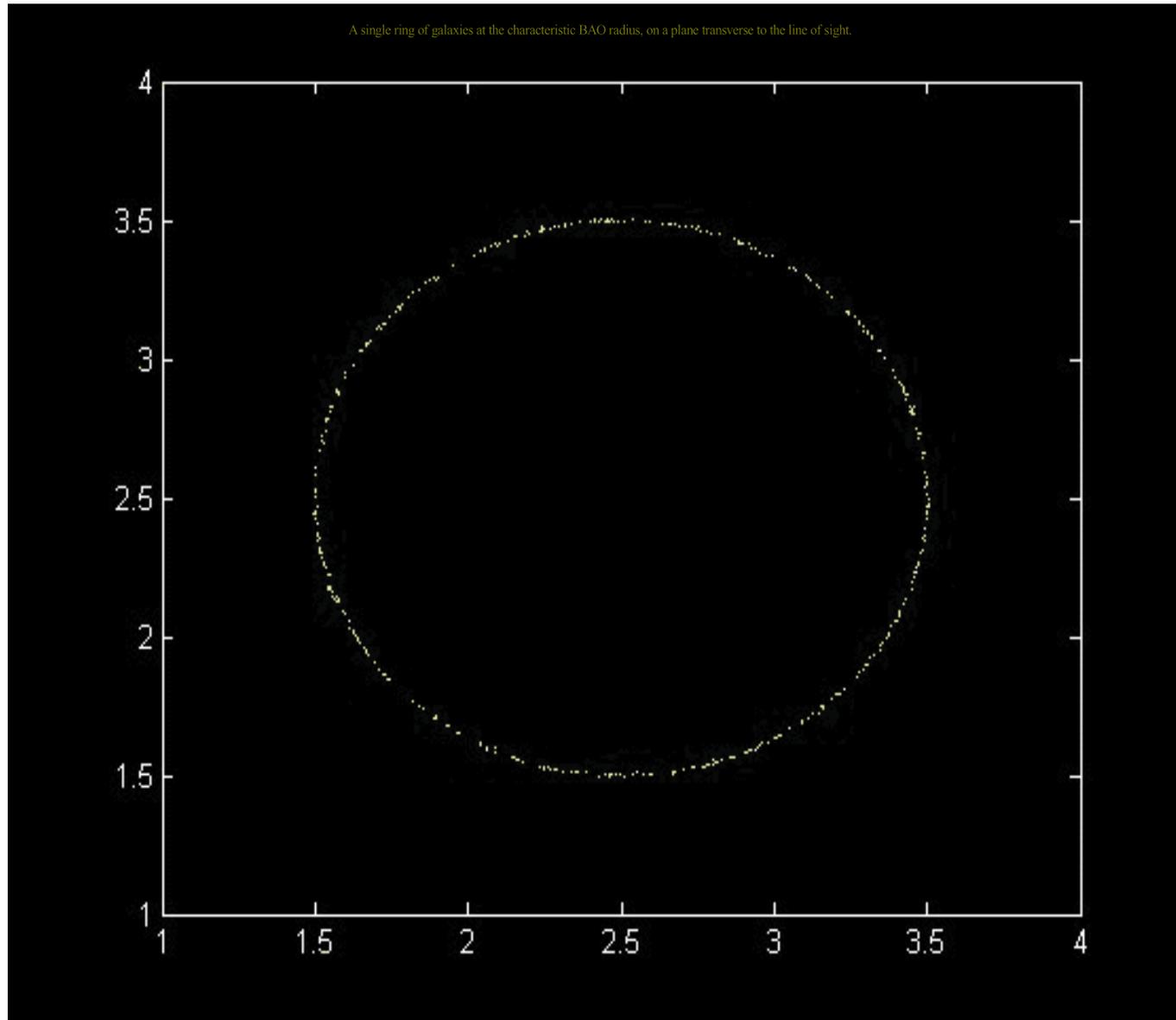
- ☑ Fisicamente, a escala do horizonte sonoro, em que ocorre a máxima compressão de matéria (pico) é  $d_s(t_{ls})=0.145$  Mpc, que corresponde a um a um comprimento co-móvel  $r_s = d_s(t_{ls})(1+z_{ls}) \approx 160$  Mpc
- ☑ Esse é comprimento da chamada “escala acústica”, que corresponde à uma perturbação de massa  $M_s=7 \times 10^{17} M_{\text{Sol}}$
- ☑ Logo após o desacoplamento, a amplitude dos BAO era muito pequena, mas a aglutinação gravitacional levou a amplitudes que hoje são mensuráveis
- ☑ Interessante mencionar que, apesar dessa flutuação ocorrer em escalas em que o Universo deveria ser homogêneo e isotrópico em escalas  $> 100$  Mpc, ela é pequena o suficiente para mantermos essa afirmação!
- ☑ A forma de detecção desses objetos é através da função de correlação de galáxias, que é uma maneira de definir um excesso de objetos em cima de uma distribuição aleatória. Essa função é normalmente conhecida como  $\xi(r)$

# Volumes padrão....

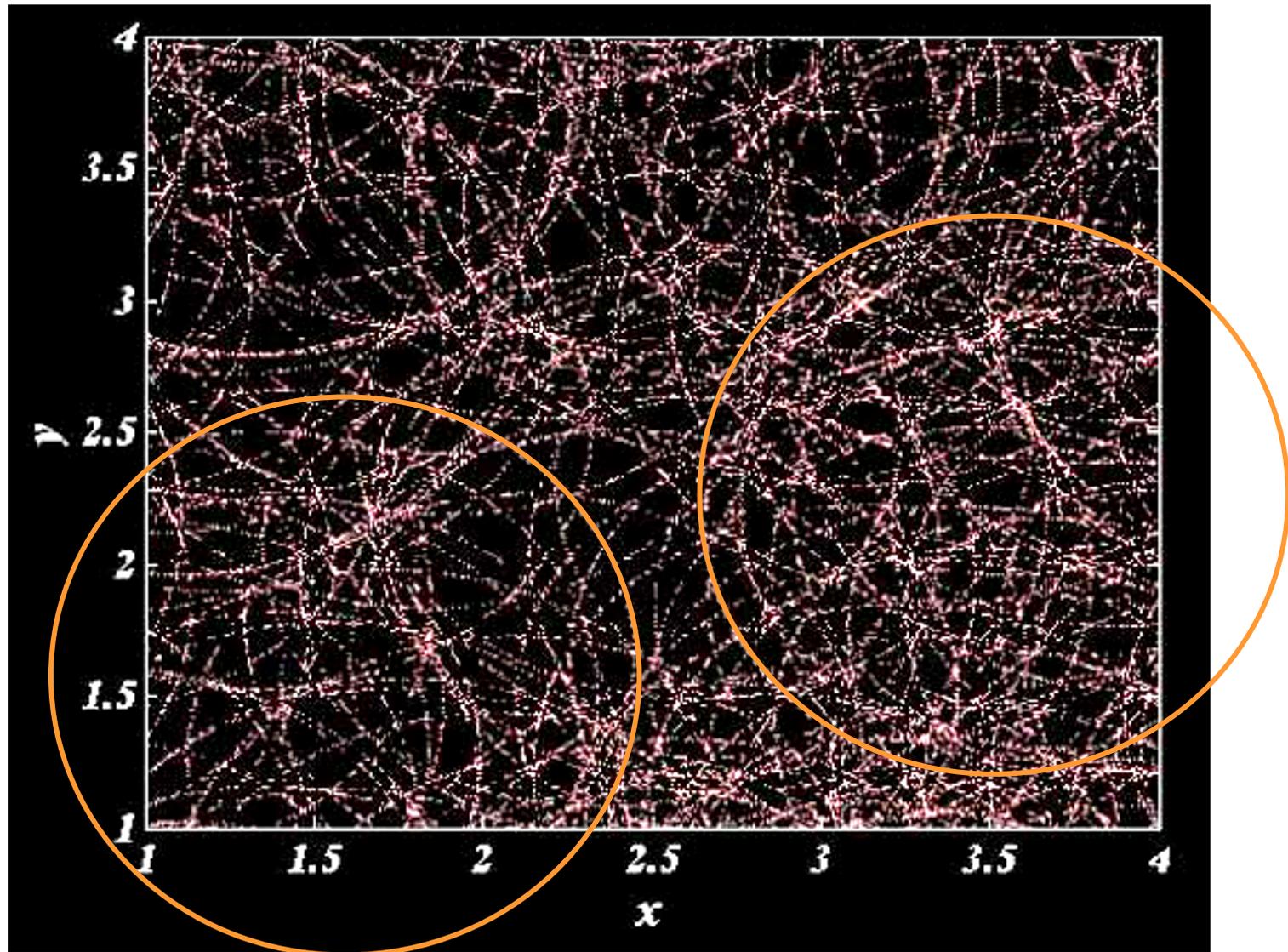




# Rings of Power Superposed



# Statistical Standard Rulers



*Bassett & Hlozek (2009)*

C. A. Wuensche (2020)

$$dN = n_{gal}[1 + \xi(r)]dV$$

65

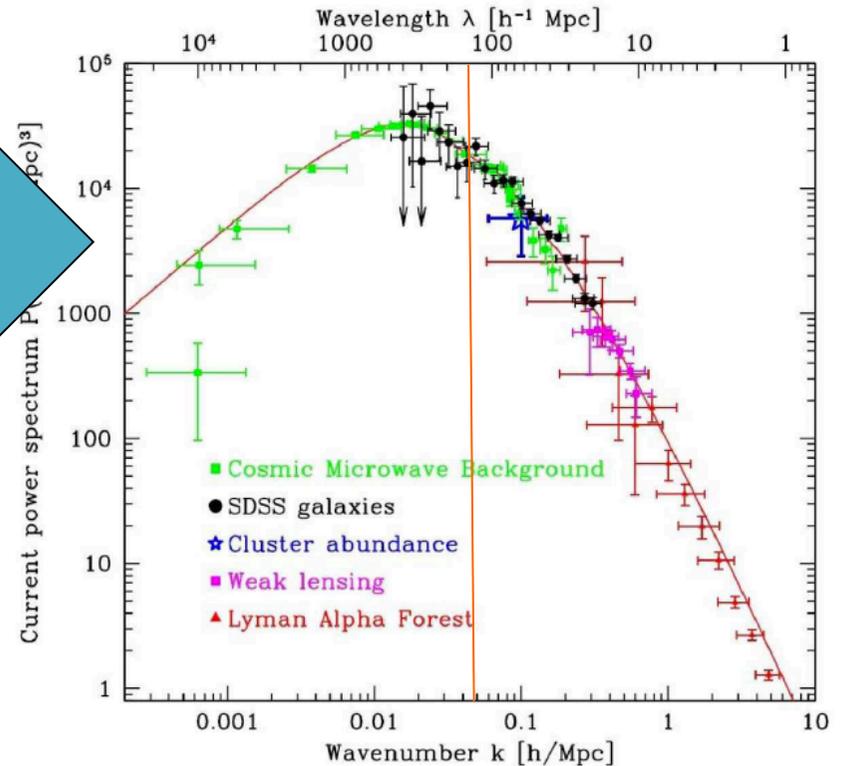
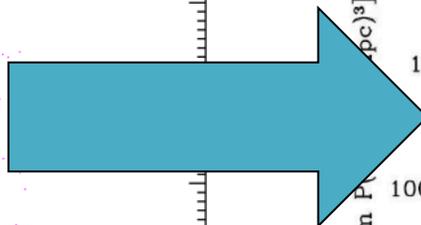
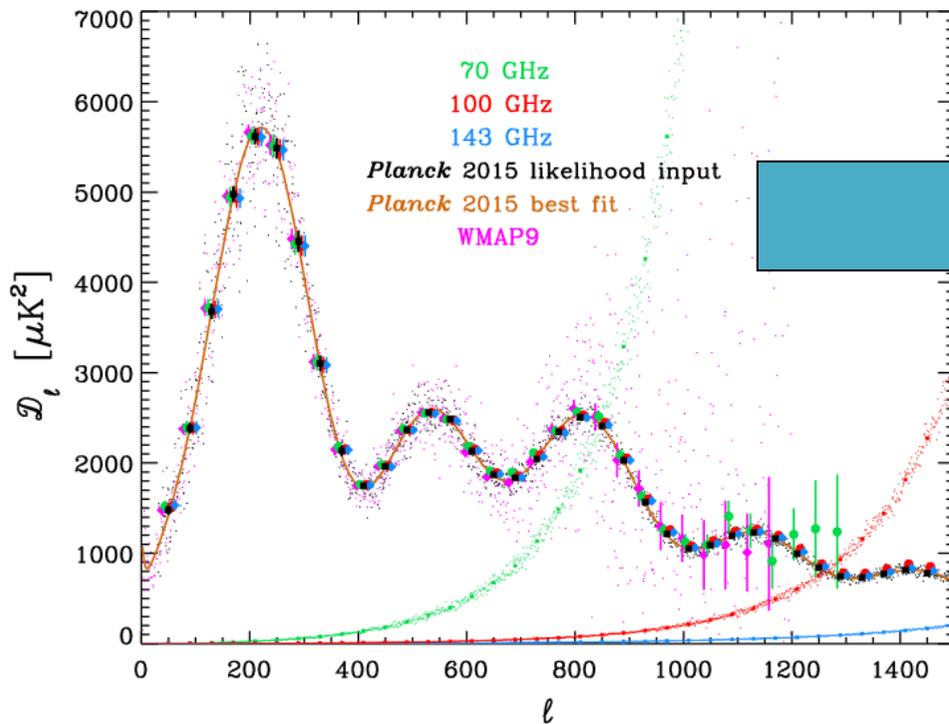
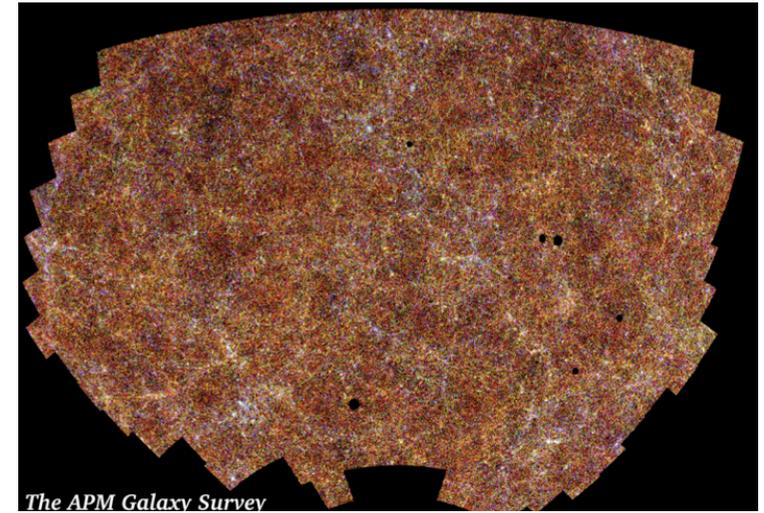
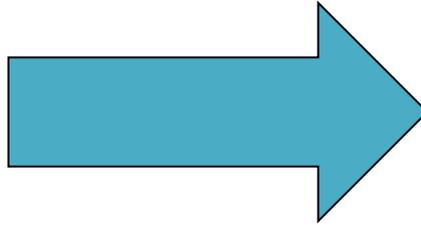
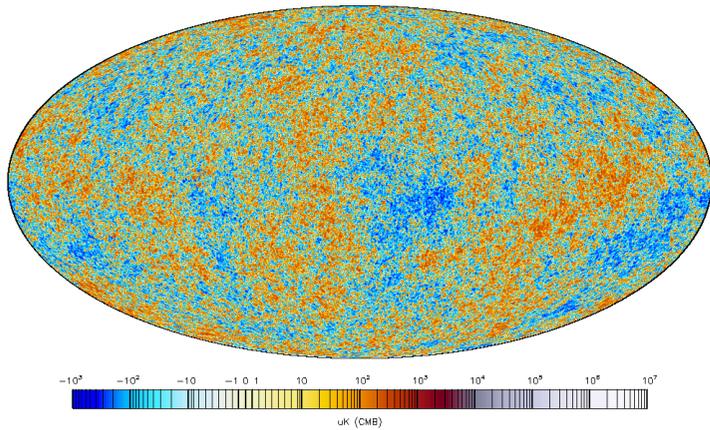
- ☑ E  $\xi(r)$  é definida em termos dos modos de Fourier para diferentes números de onda, ou seja, diferentes tamanhos das perturbações.

$$\xi(r) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k \rightarrow \frac{V}{2\pi^2} \int P(k) j_0(kr) k^2 dk$$

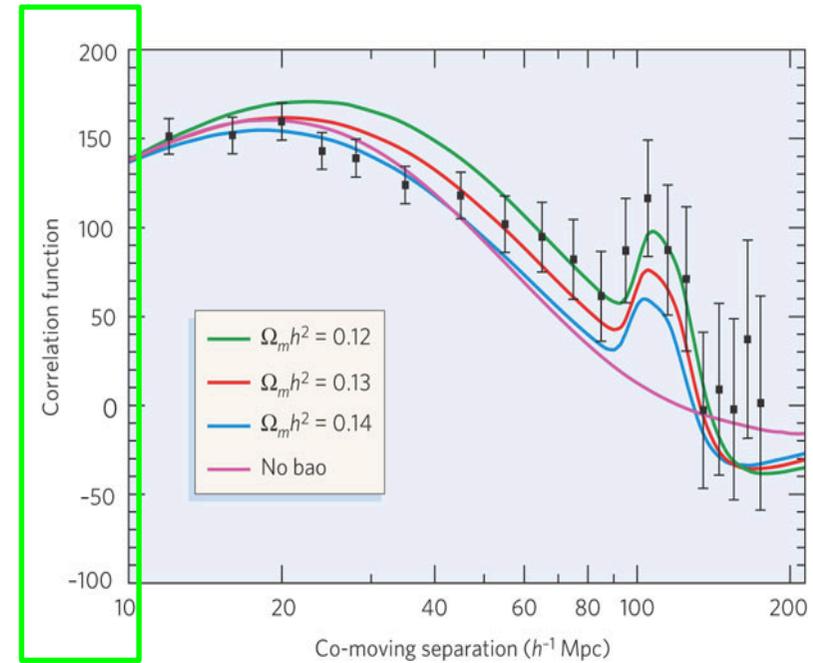
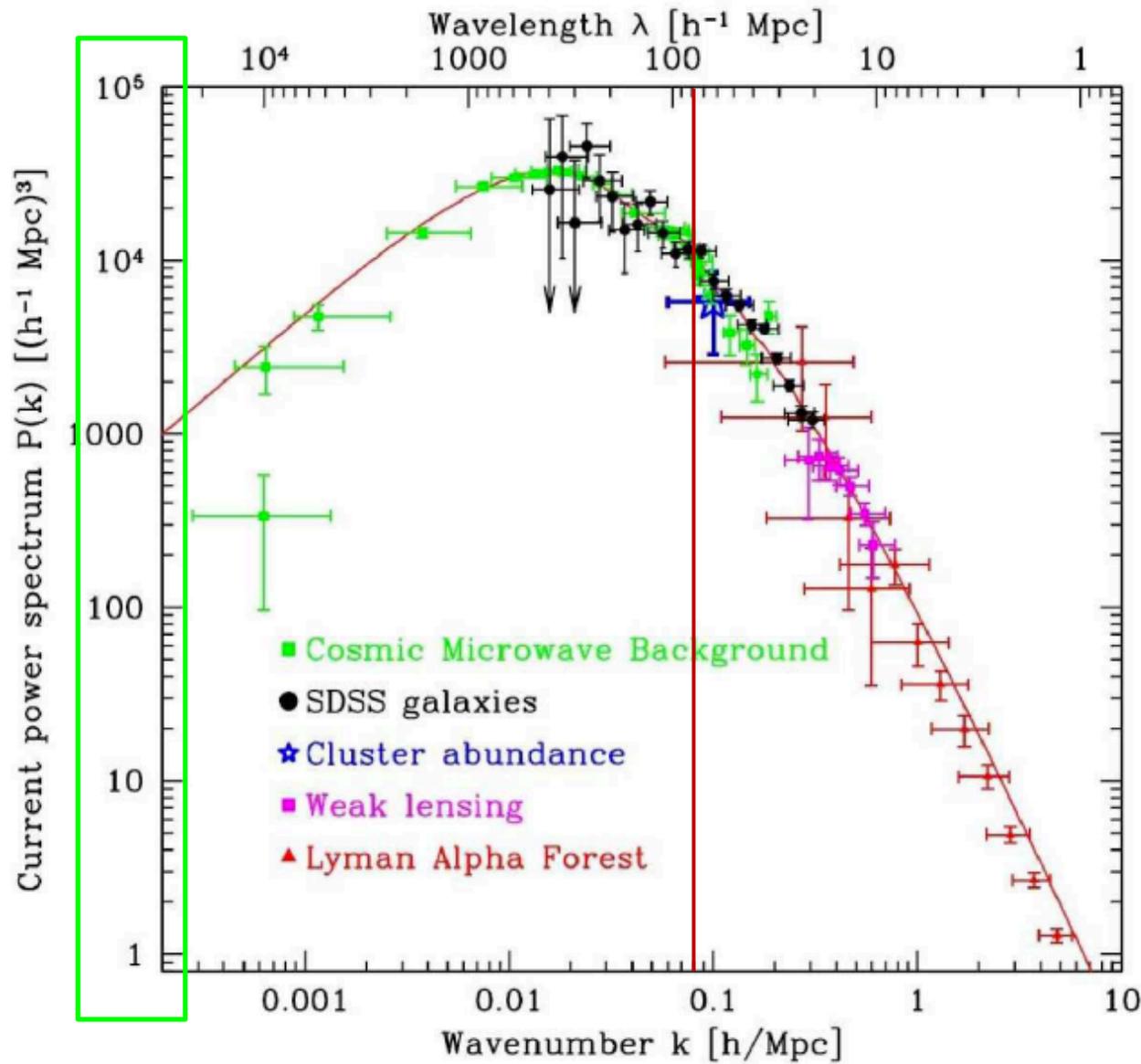
66

- ☑ No caso de BAO, haverá um excesso para  $k$  correspondente a 160 Mpc (de acordo com os cálculos de B. Ryden).
- ☑ Como a escala acústica correspondente a  $r_{BAO} \approx 0.04c/H_0$ , que equivale a  $z \approx 0.04$ , se fizermos observações mais profundas ( $z \gg 0.04$ ), espera-se que essa escala preferencial apareça quando computarmos  $P(k)$
- ☑ **O tamanho da escala de BAO medida pelo Planck é  $r_{BAO}=147.21$  Mpc**

# Temperature x matter fluctuations

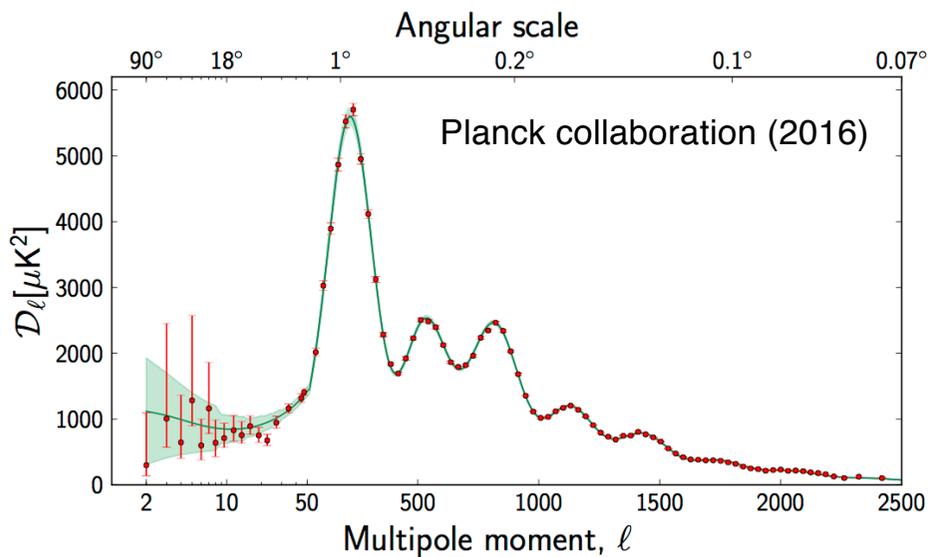
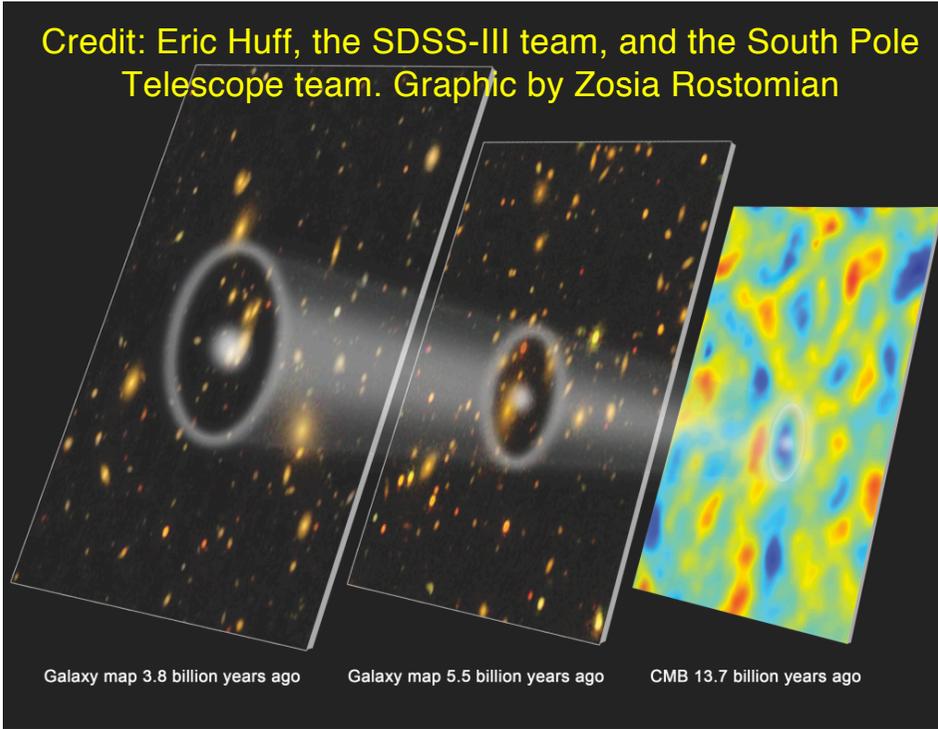


# Temperature x matter fluctuations

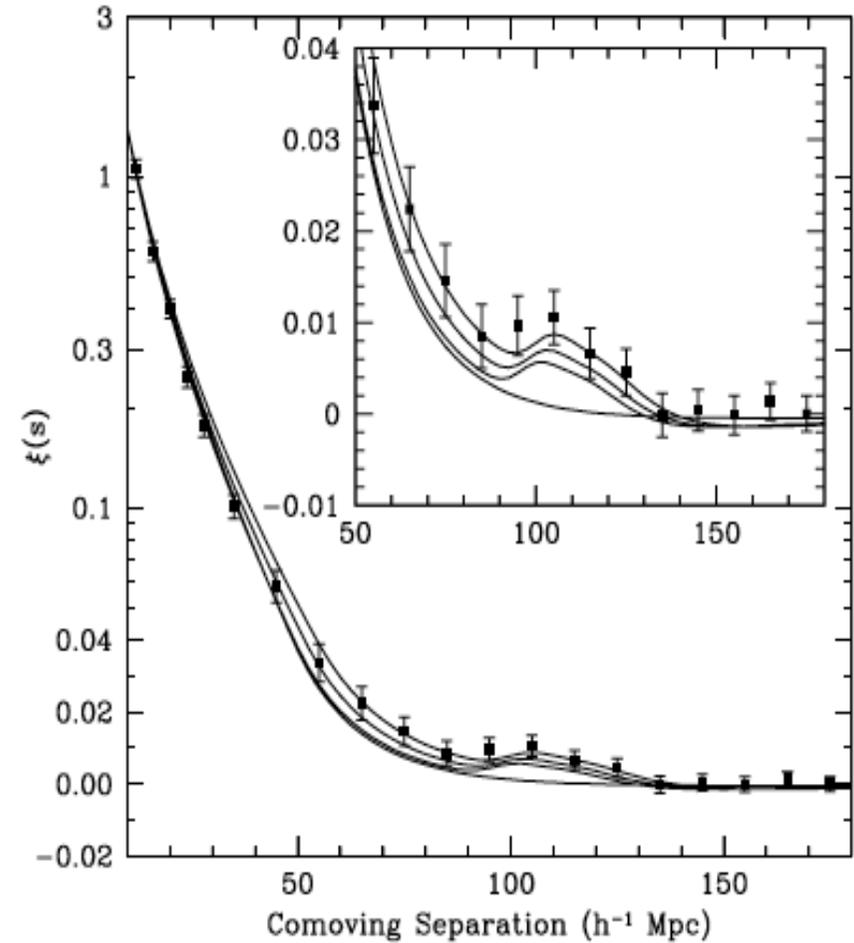


# Baryon Acoustic Oscillations (BAOs)

Credit: Eric Huff, the SDSS-III team, and the South Pole Telescope team. Graphic by Zosia Rostomian



Eisenstein et al. (2005)



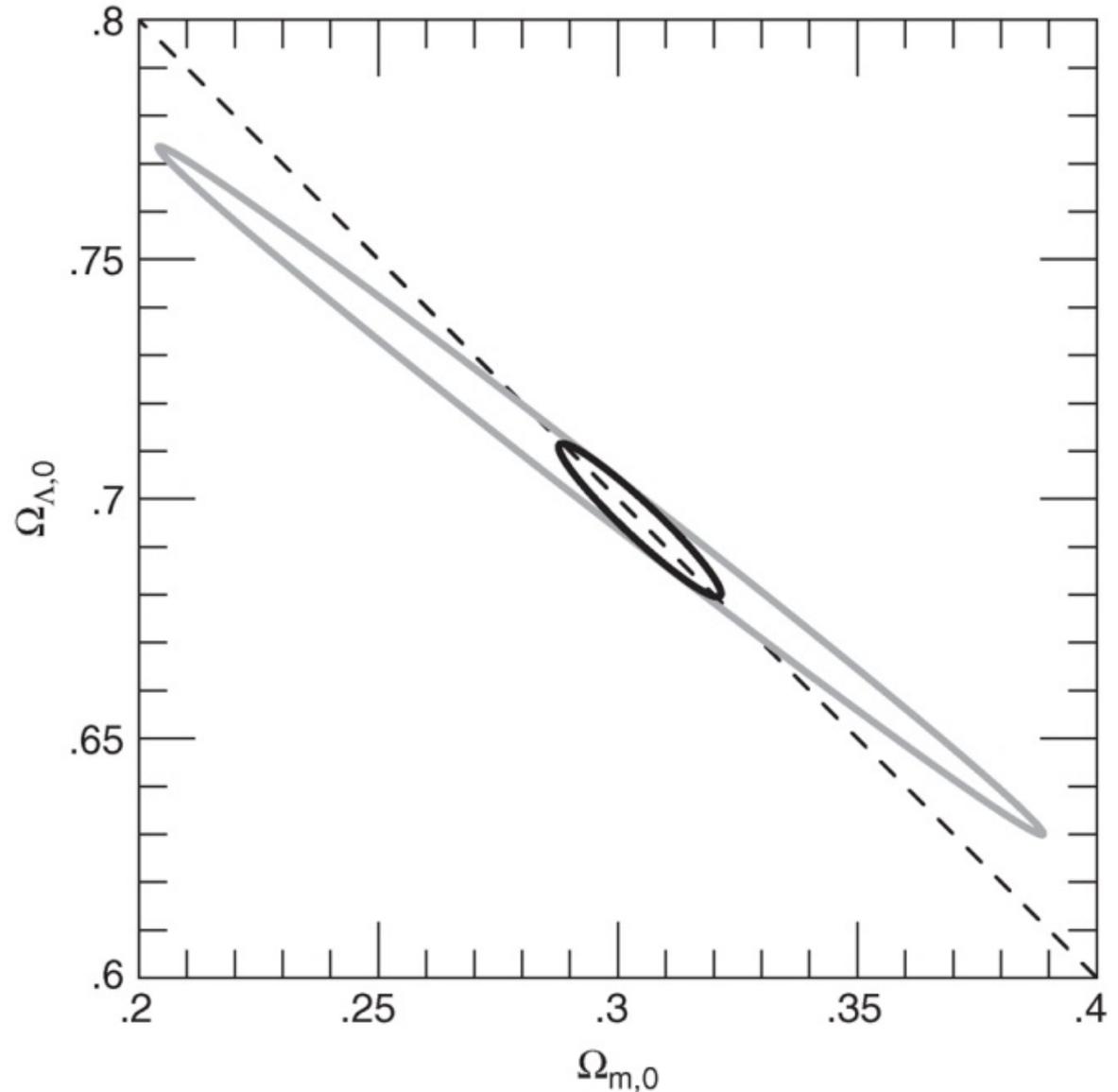


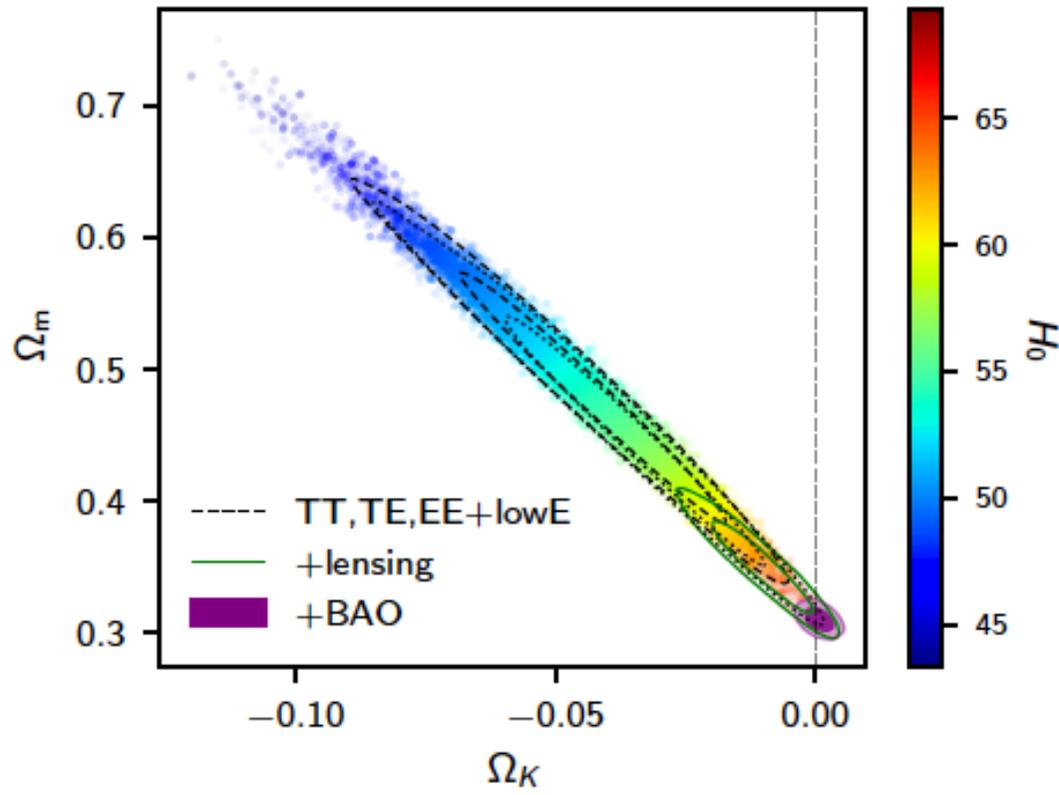
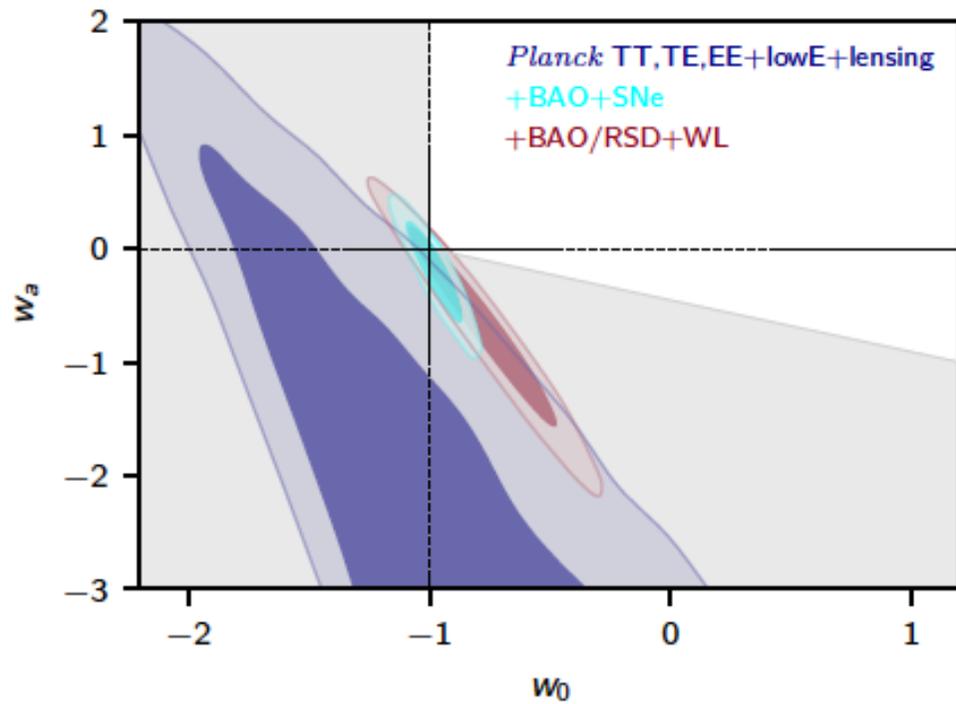
Fonte: Introduction to Cosmology (B. Ryden)

Poder de previsão dos parâmetros cosmológicos ("forecasts") aumenta bastante com a inclusão de BAO. A elipse maior é produzida a partir da combinação de resultados de CMB e SN Ia.

A elipse mais escura é produzida ao adicionarmos BAO na análise.

A relação entre os parâmetros de densidade é muito mais restritiva com BAO!!! !







FIM DA AULA 11