

# Fundamentos de Cosmologia

## *Aula 10*

AST-413-4 - INPE - 2020-3

Prof. Dr. Carlos Alexandre Wuensche

Prof. Dra. Christine Córdula Dantas

# 10. A Inflação e o Universo Primordial

- 10.0 Introdução
- 10.1 O Problema da Planicidade
- 10.2 O Problema do Horizonte
- 10.3 O Problema do Monopolo
- 10.4 A Solução via Inflação
- 10.5 A Física da Inflação

# 10.0 Introdução

Apesar dos vários sucessos do modelo do Big Bang, tornou-se claro, principalmente após a descoberta da radiação cósmica de fundo em microondas (RCFM), a existência de alguns problemas no modelo.

**Problema da  
planicidade**

**Problema do  
horizonte**

**Problema do  
monopolo**

## 10.0 Introdução

O Universo hoje é aproximadamente plano e, no passado, era ainda mais próximo de ser plano.

**Problema da planicidade**

O Universo hoje é aproximadamente homogêneo e isotrópico e, no passado, era mais ainda.

**Problema do horizonte**

O Universo aparentemente não possui monopolos magnéticos.

**Problema do monopolo**

# Horizontes

## Horizontes

### Horizonte da Partícula

É a distância máxima a partir da qual um observador pode receber um sinal luminoso. (Geralmente se refere a um sinal enviado em “ $t=0$ ”).

### Horizonte de Eventos

É a distância máxima na qual um observador pode enviar um sinal (até o relógio “bater  $t=t_f$ ”).

## Horizontes

### Horizonte da Partícula “Horizonte”

A distância própria ao horizonte da partícula é:

$$d_{\text{hor}}(t_0) = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

(5.51) Ryden

“Universo visível”

## Horizontes

### Horizonte da Partícula

*Por exemplo:*

O **objeto mais distante que podemos observar hoje** é aquele na qual a luz emitida em “ $t = 0$ ” está nos alcançando agora, em  $t = t_0$ .

(Em teoria... para um Universo 100% sempre transparente...)



## LEMBRANDO...

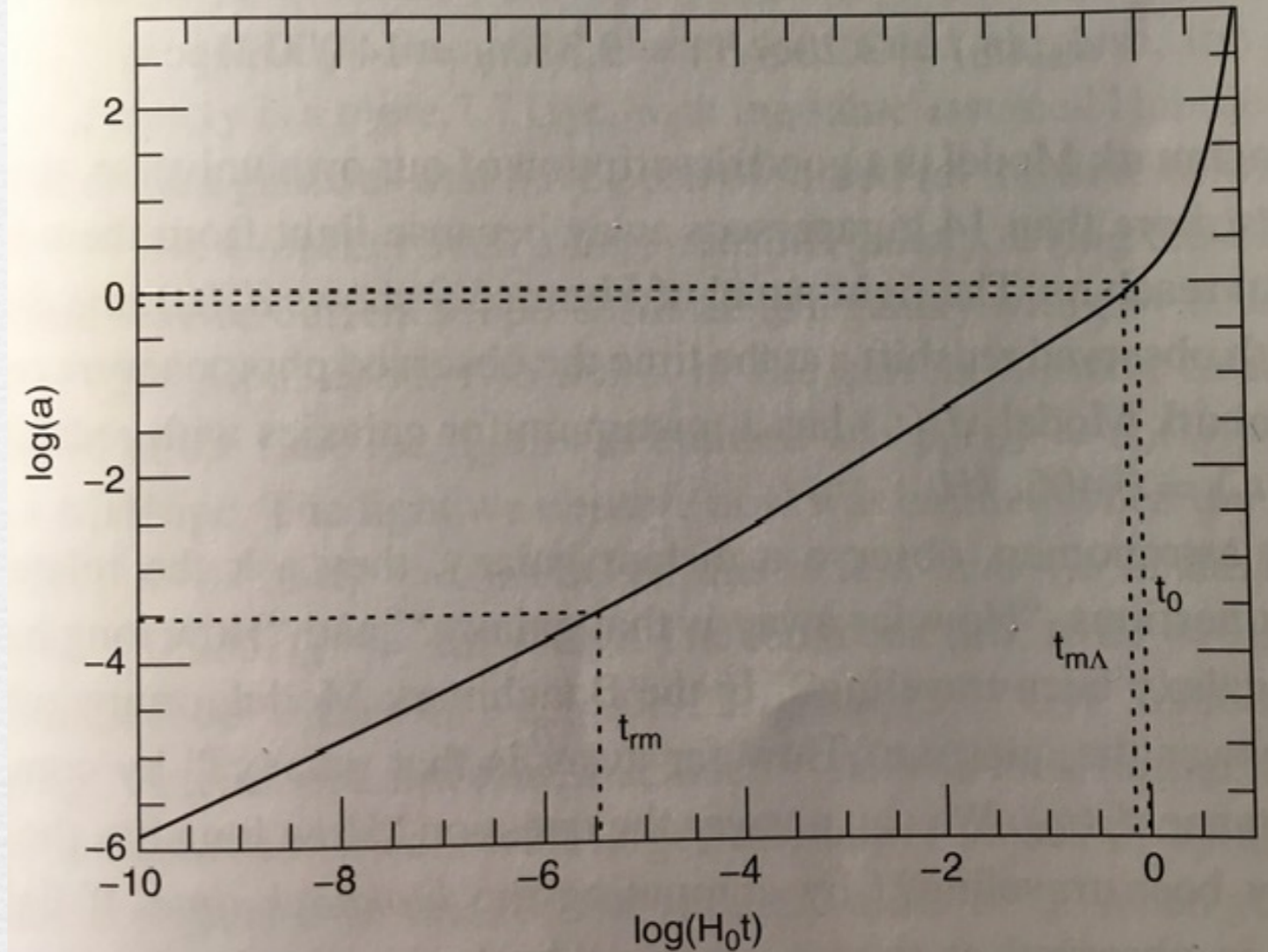
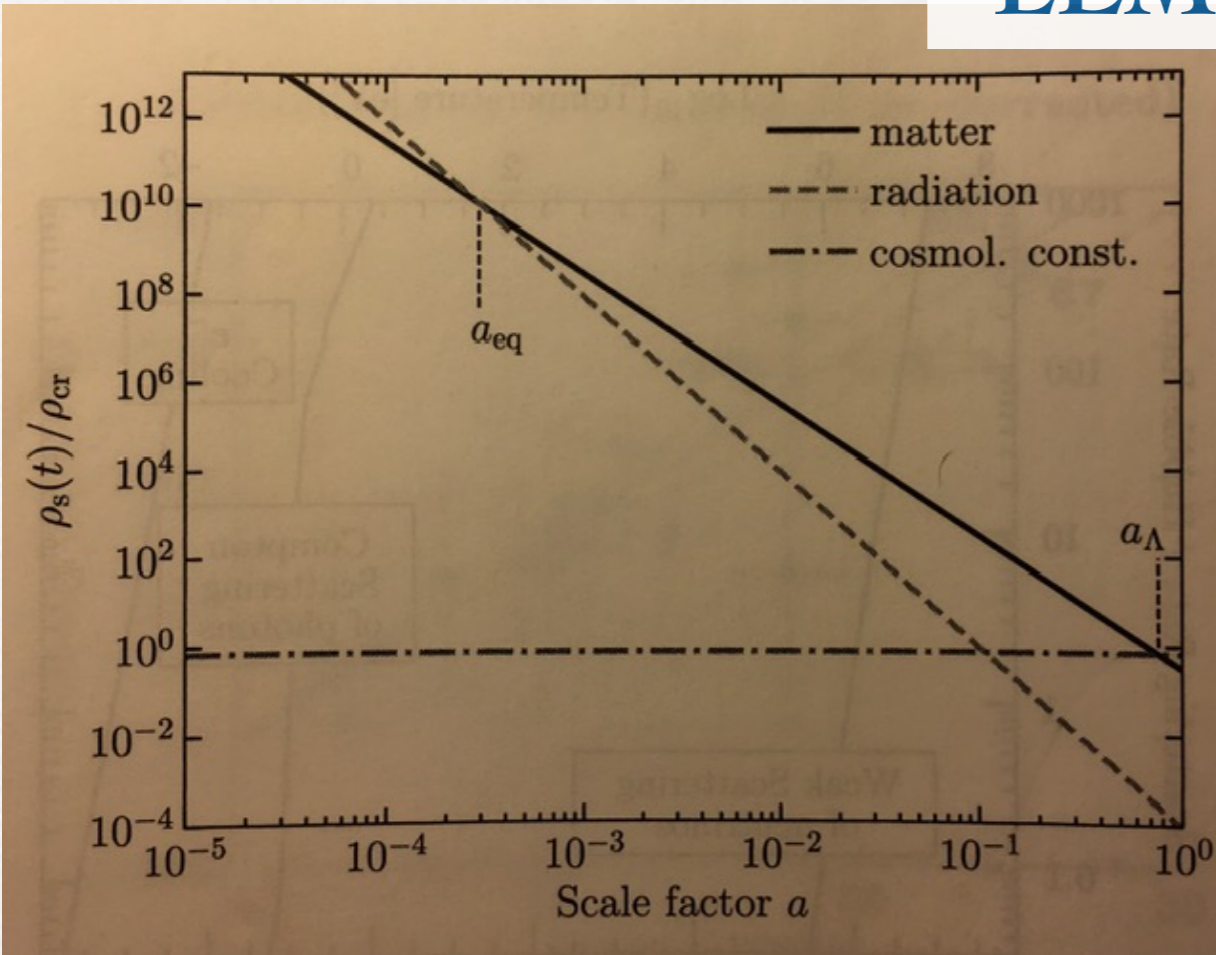
### Distância de Hubble

Pontos separados por uma distância própria maior do que a distância de Hubble,

$$d_H(t_0) \equiv c/H_0$$

apresentam velocidades de recessão maiores do que a da luz.

***Nota:* esta definição depende apenas de homogeneidade e isotropia.**



Benchmark Model:

$$a_{rm} = 2.9 \times 10^{-4}; t_{rm} = 0.050 \text{ Myr}$$

$$a_{m\Lambda} = 0.77; t_{m\Lambda} = 10.2 \text{ Gyr}$$

$$a_0 = 1; t_0 = 13.7 \text{ Gyr}$$

## LEMBRANDO...

métrica de FLRW

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_{\kappa}^2(r) d\Omega^2]$$

tempo “cósmico” ou “próprio”

**Tempo conforme:**

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}$$

Fatorização da métrica de FLRW:

$$ds^2 = a(\eta)^2 [-c^2 d\eta^2 + dr^2 + S_{\kappa}^2(r) d\Omega^2]$$

Fator de escala  
(reparametrizado)

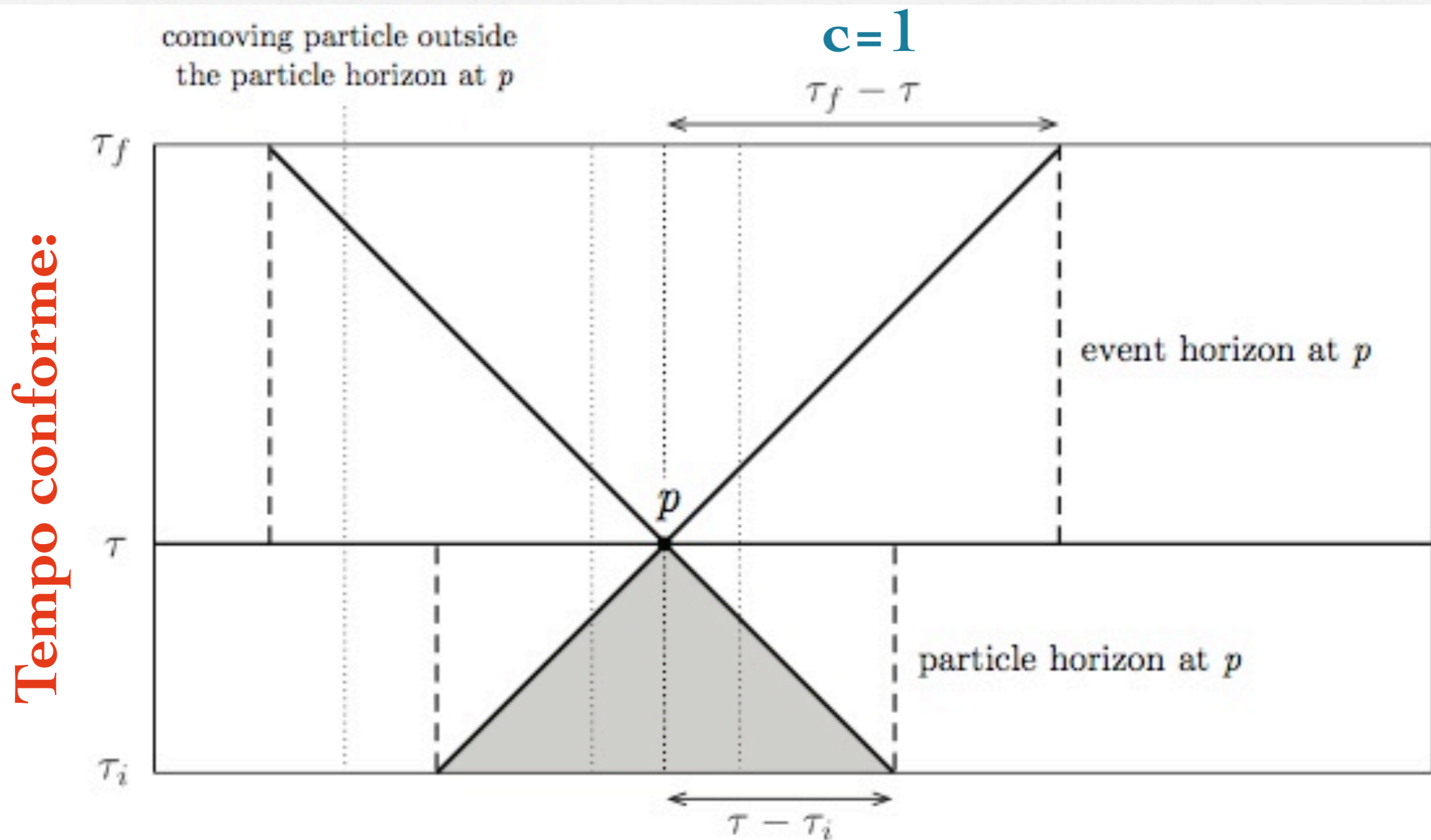
métrica de Minkowski estática  
(pois as variáveis são comóveis)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

## 10.0 Introdução

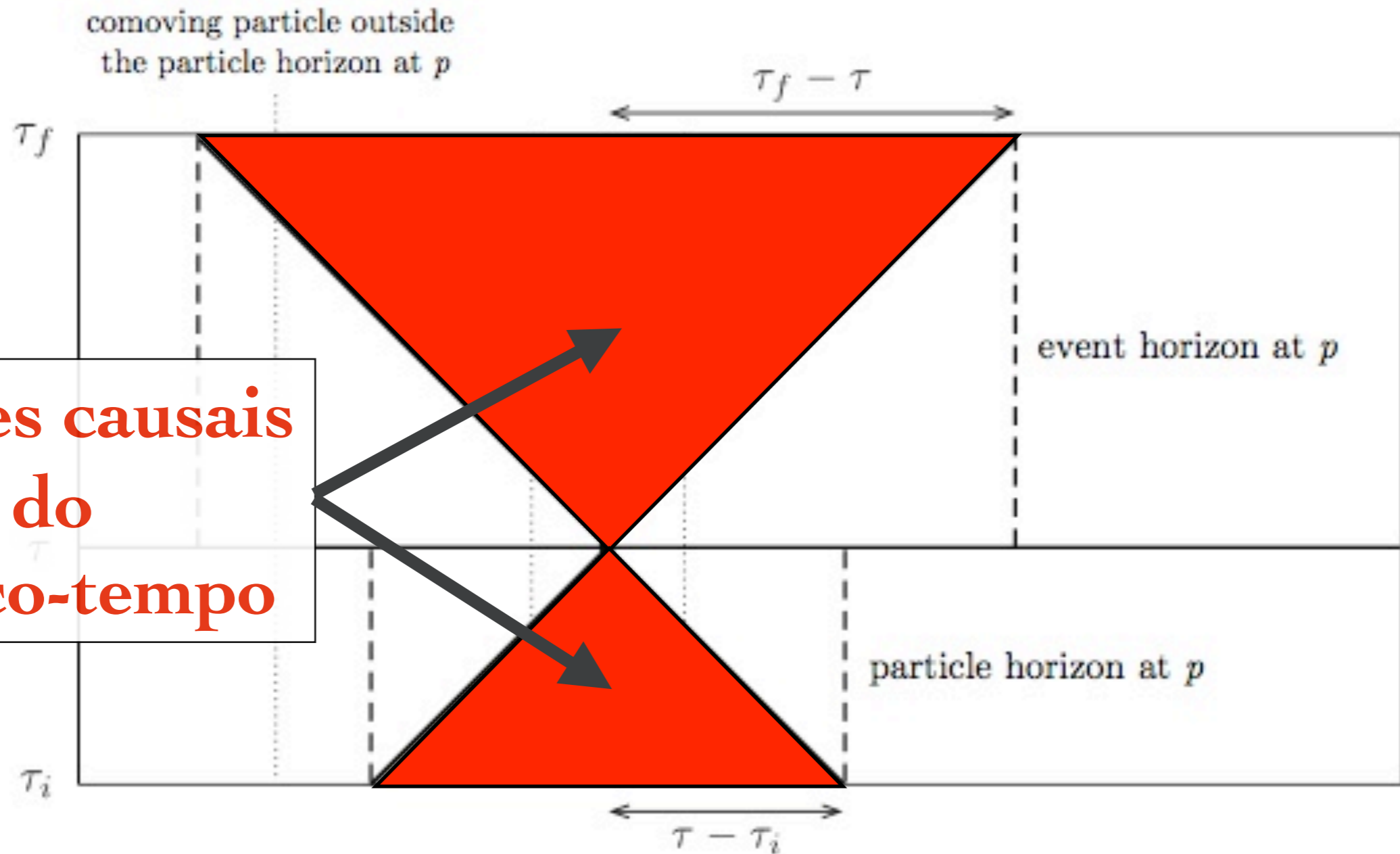
Diagrama de Minkowski comóvel, tempo conforme

# Horizontes



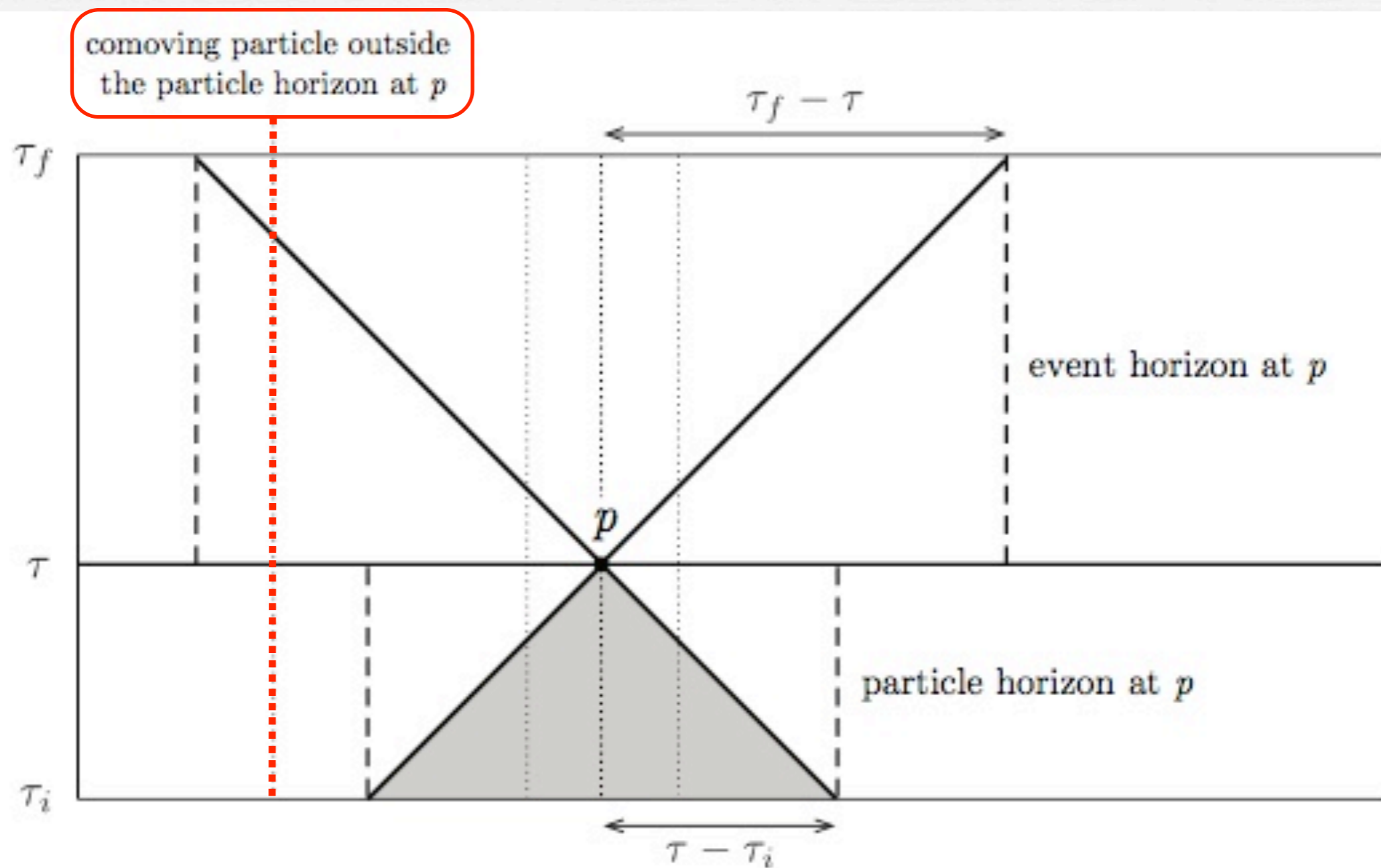
**Figure 2.1:** Spacetime diagram illustrating the concept of horizons. Dotted lines show the worldlines of comoving objects. The event horizon is the maximal distance to which we can send signal. The particle horizon is the maximal distance from which we can receive signals.

# Horizontes



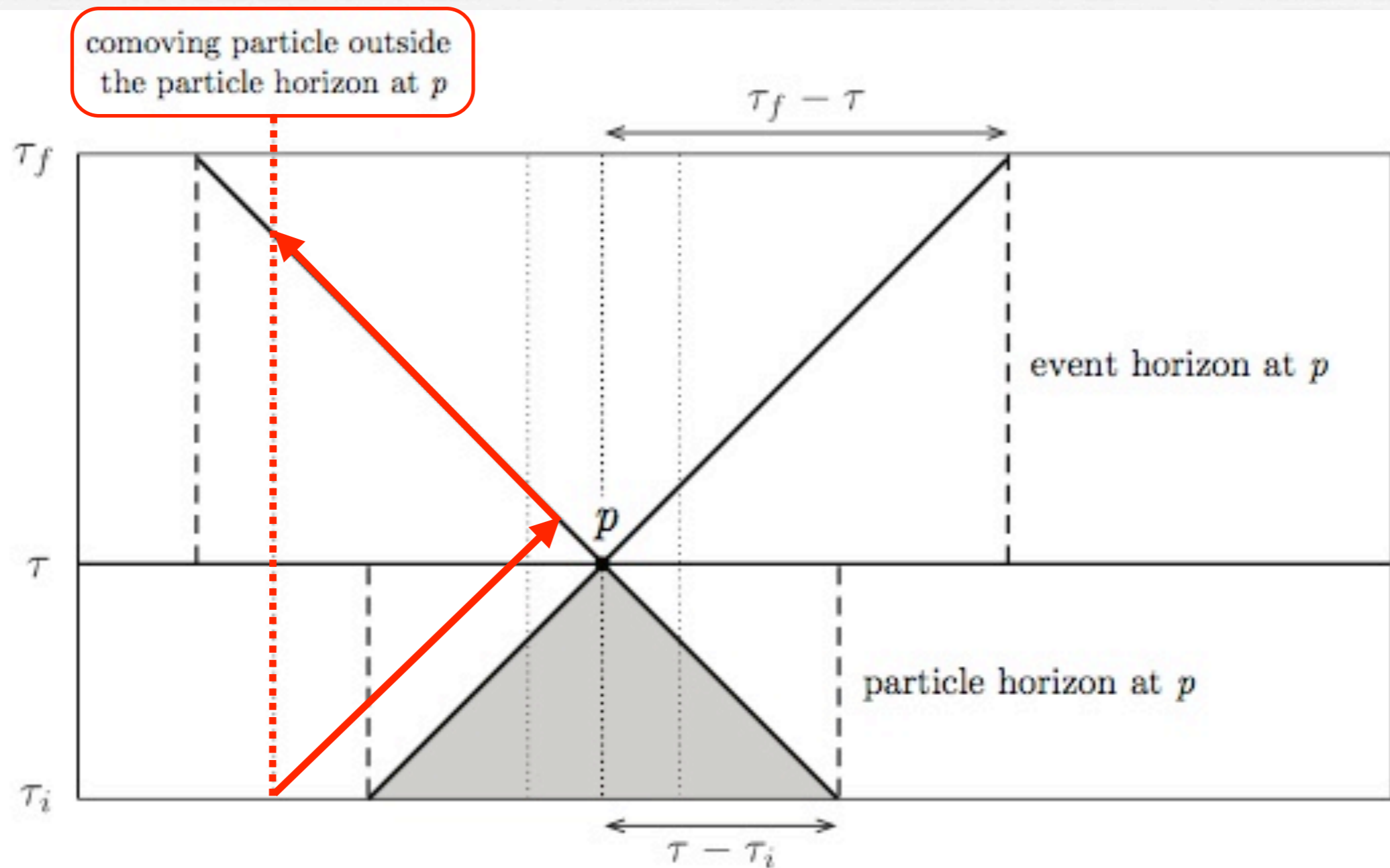
**Figure 2.1:** Spacetime diagram illustrating the concept of horizons. Dotted lines show the worldlines of comoving objects. The event horizon is the maximal distance to which we can send signal. The particle horizon is the maximal distance from which we can receive signals.

# Horizontes



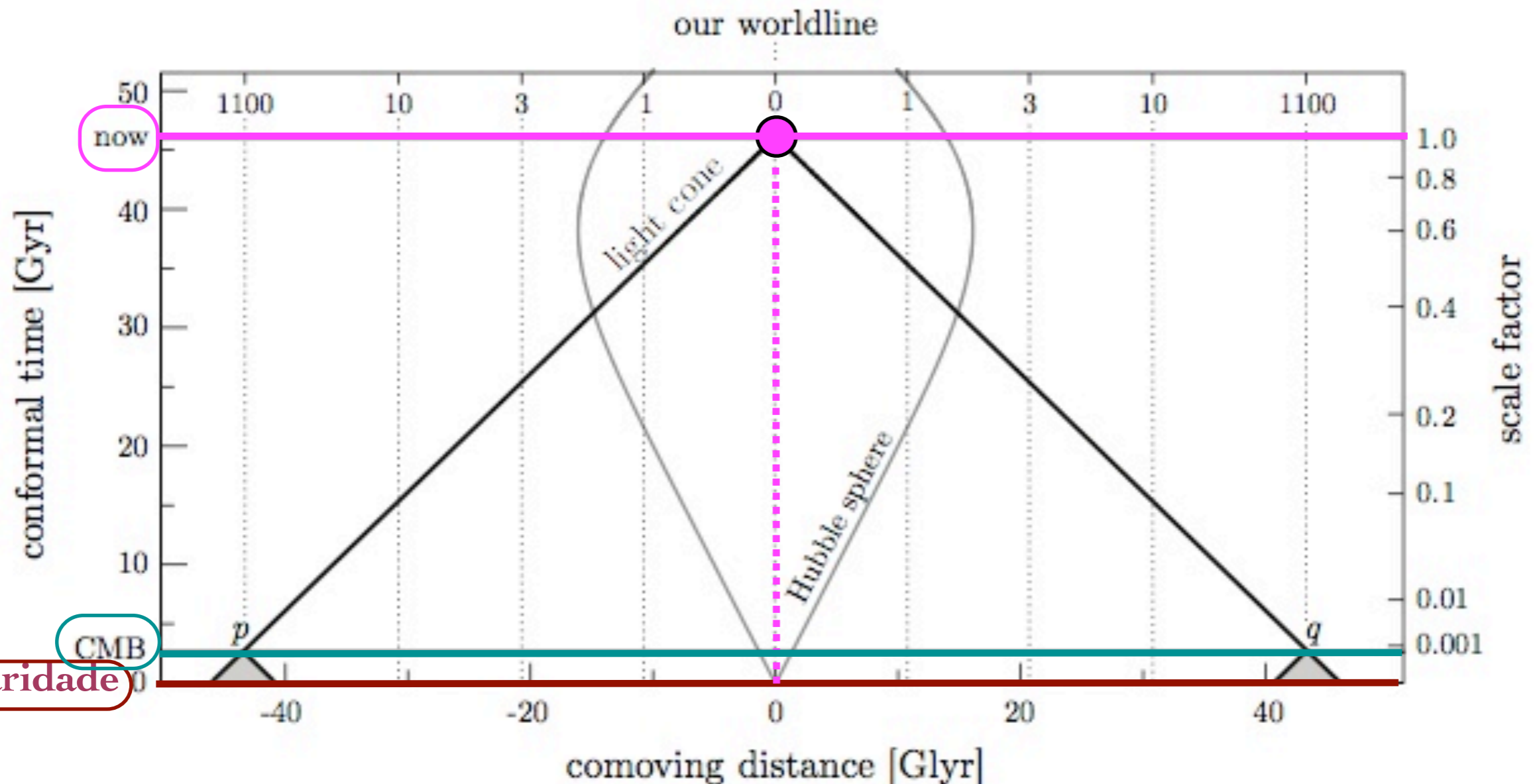
**Figure 2.1:** Spacetime diagram illustrating the concept of horizons. Dotted lines show the worldlines of comoving objects. The event horizon is the maximal distance to which we can send signal. The particle horizon is the maximal distance from which we can receive signals.

# Horizontes



**Figure 2.1:** Spacetime diagram illustrating the concept of horizons. Dotted lines show the worldlines of comoving objects. The event horizon is the maximal distance to which we can send signal. The particle horizon is the maximal distance from which we can receive signals.

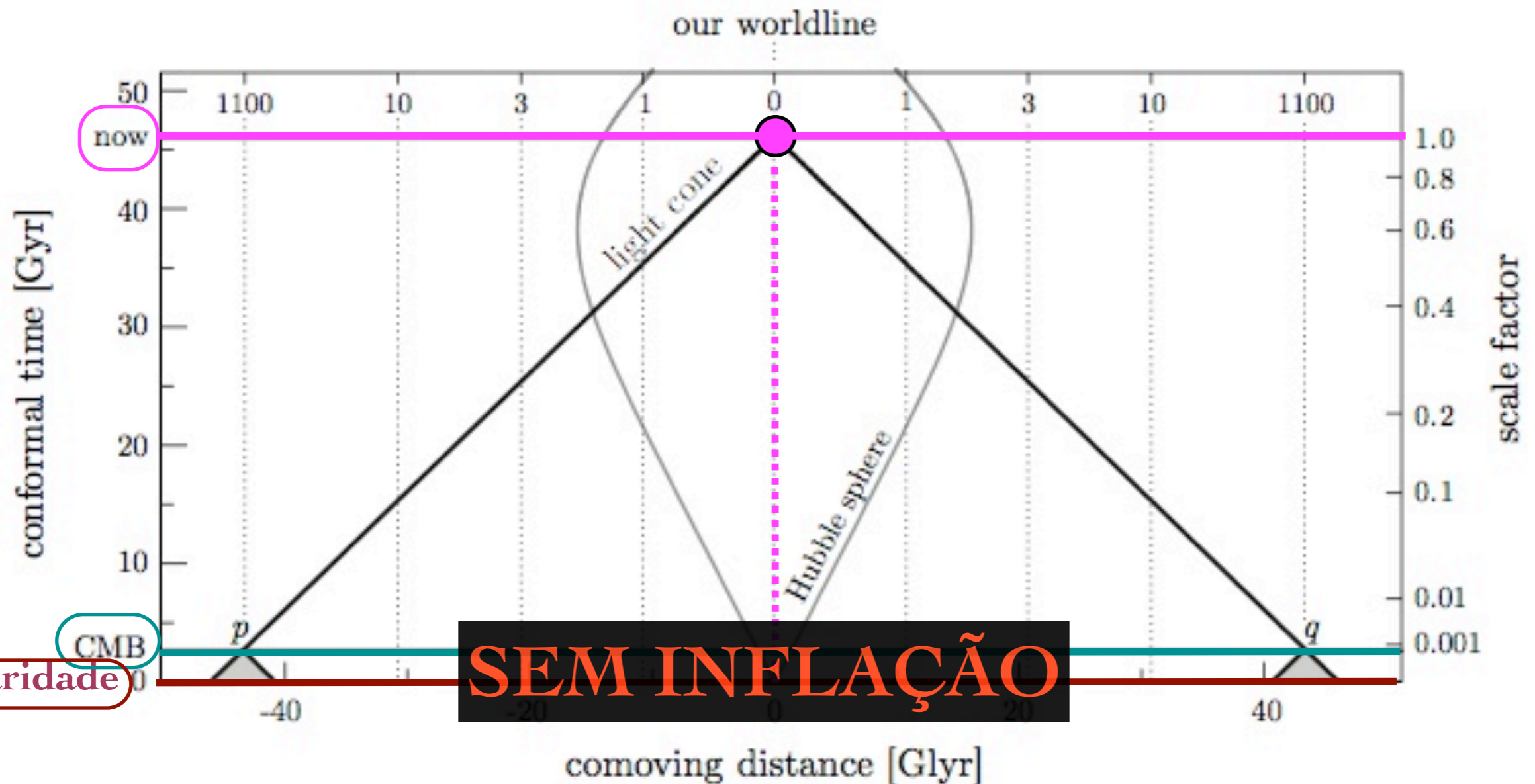
# Horizontes



**Figure 2.2:** The horizon problem in the conventional Big Bang model. All events that we currently observe are on our past light cone. The intersection of our past light cone with the spacelike slice labelled CMB corresponds to two opposite points in the observed CMB. Their past light cones don't overlap before they hit the singularity,  $a = 0$ , so the points appear never to have been in causal contact. The same applies to any two points in the CMB that are separated by more than 1 degree on the sky.



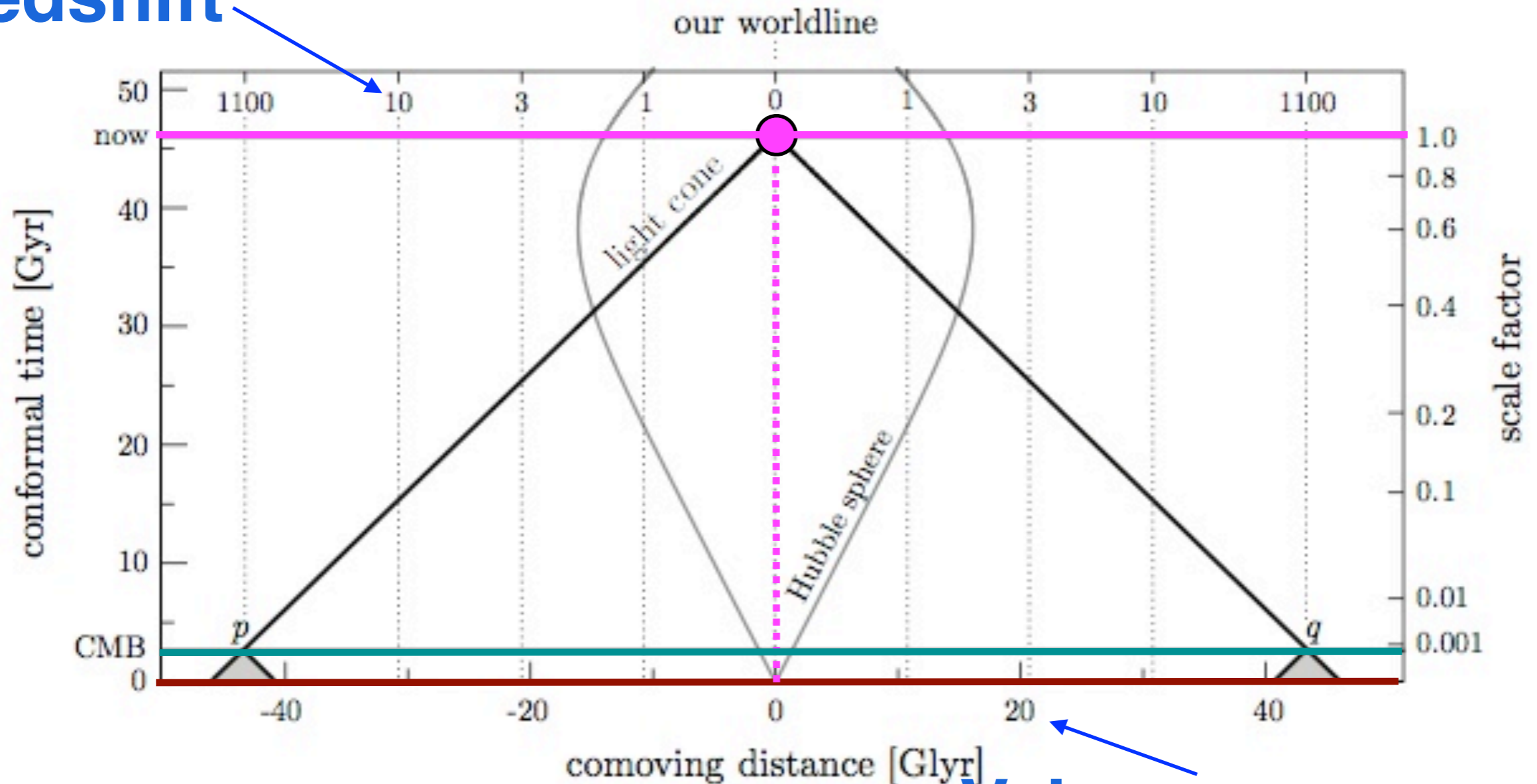
# Horizontes



**Figure 2.2:** The horizon problem in the conventional Big Bang model. All events that we currently observe are on our past light cone. The intersection of our past light cone with the spacelike slice labelled CMB corresponds to two opposite points in the observed CMB. Their past light cones don't overlap before they hit the singularity,  $a = 0$ , so the points appear never to have been in causal contact. The same applies to any two points in the CMB that are separated by more than 1 degree on the sky.

# Horizontes

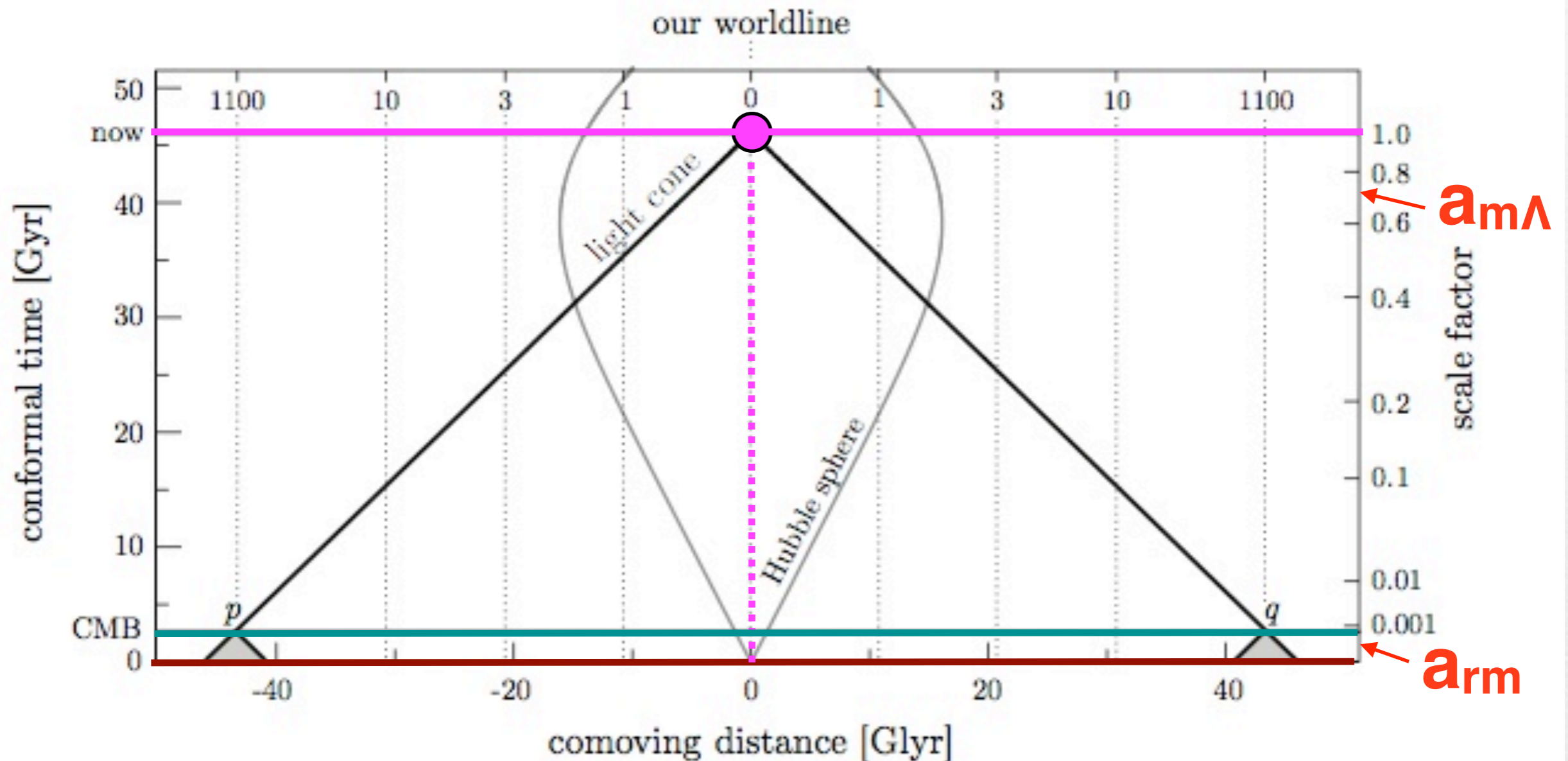
## Redshift



Valores para  $a=a_0=1$

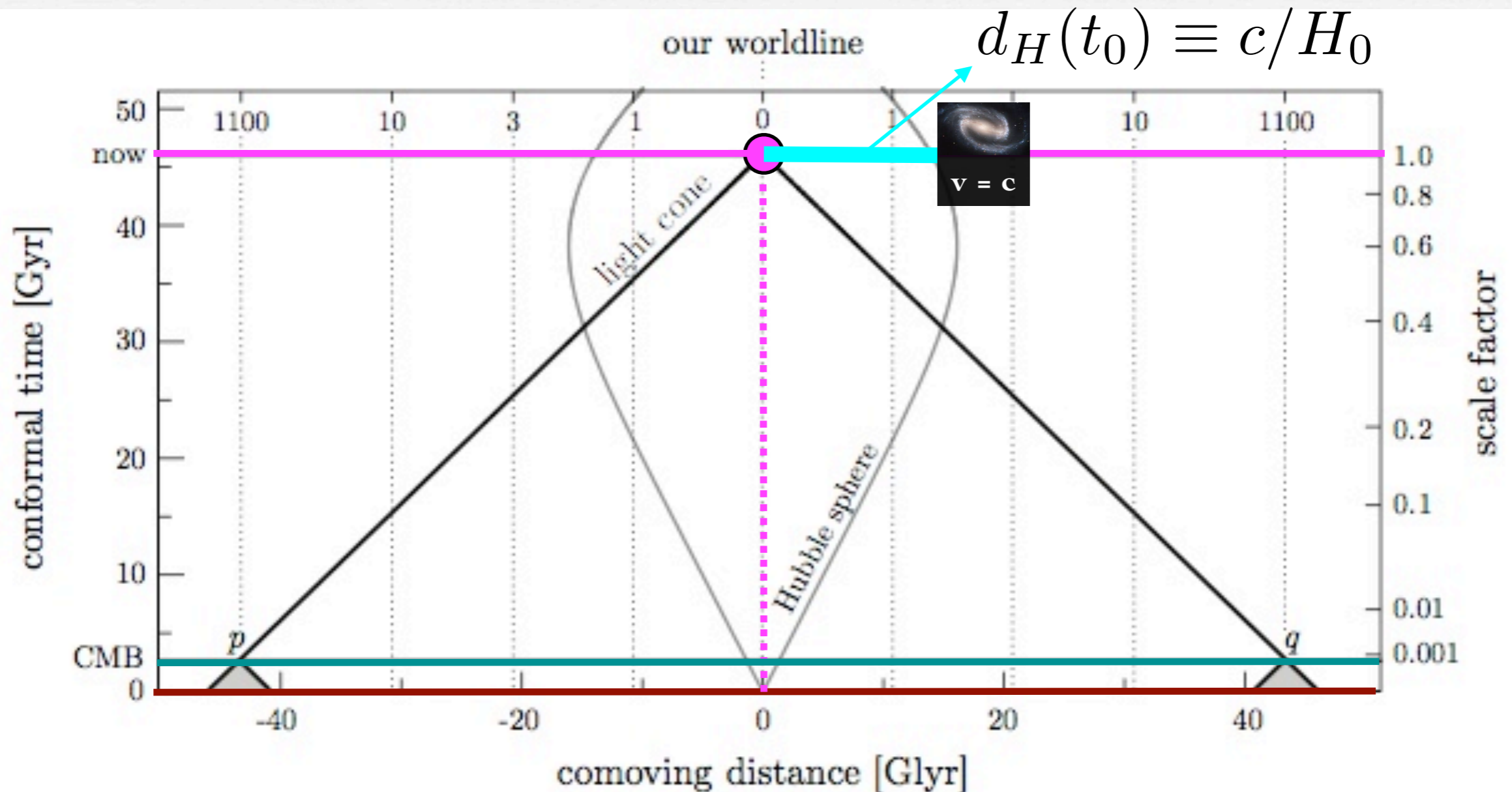
**Figure 2.2:** The horizon problem in the conventional Big Bang model. All events that we currently observe are on our past light cone. The intersection of our past light cone with the spacelike slice labelled CMB corresponds to two opposite points in the observed CMB. Their past light cones don't overlap before they hit the singularity,  $a = 0$ , so the points appear never to have been in causal contact. The same applies to any two points in the CMB that are separated by more than 1 degree on the sky.

# Horizontes



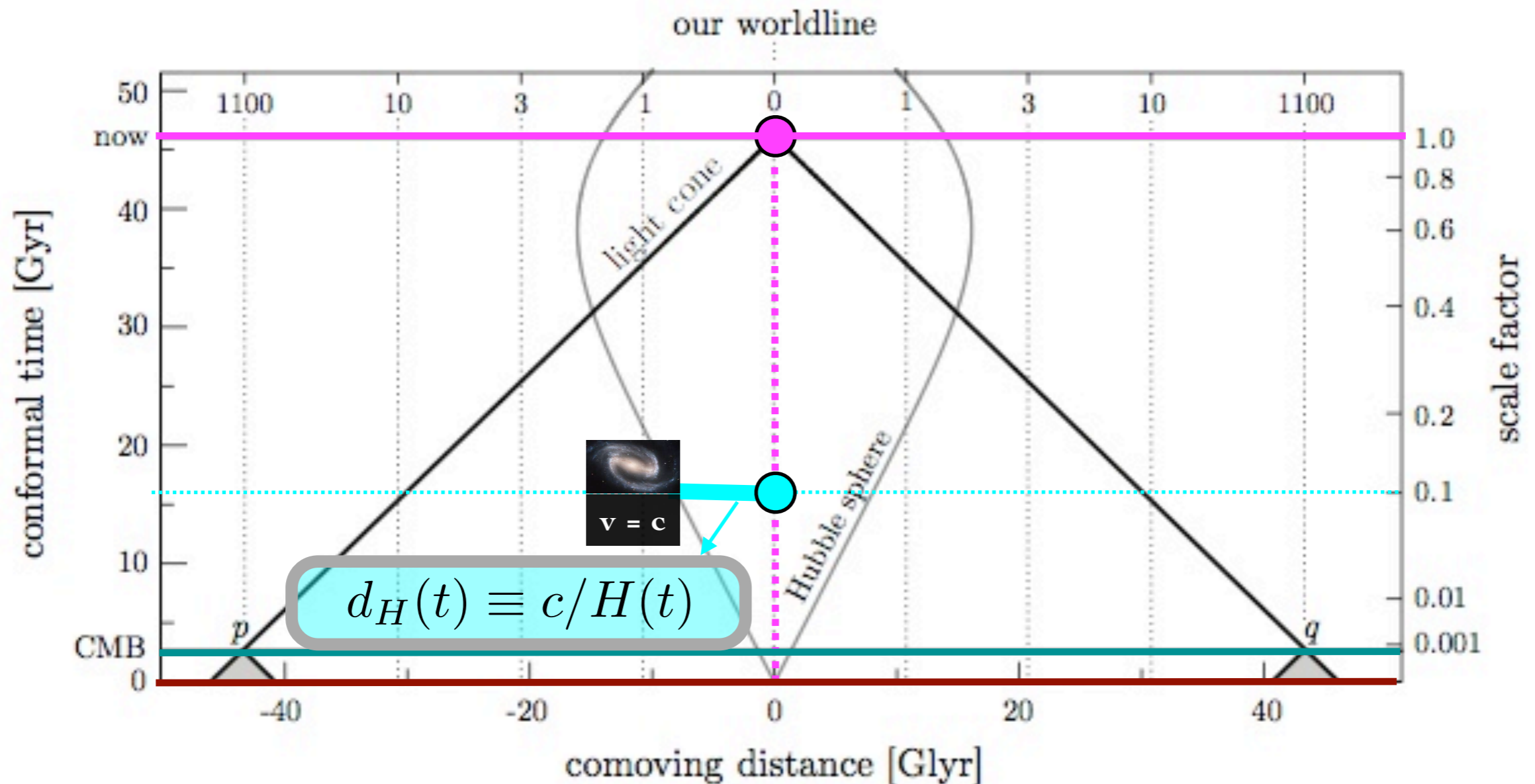
**Figure 2.2:** The horizon problem in the conventional Big Bang model. All events that we currently observe are on our past light cone. The intersection of our past light cone with the spacelike slice labelled CMB corresponds to two opposite points in the observed CMB. Their past light cones don't overlap before they hit the singularity,  $a = 0$ , so the points appear never to have been in causal contact. The same applies to any two points in the CMB that are separated by more than 1 degree on the sky.

# Horizontes



**Figure 2.2:** The horizon problem in the conventional Big Bang model. All events that we currently observe are on our past light cone. The intersection of our past light cone with the spacelike slice labelled CMB corresponds to two opposite points in the observed CMB. Their past light cones don't overlap before they hit the singularity,  $a = 0$ , so the points appear never to have been in causal contact. The same applies to any two points in the CMB that are separated by more than 1 degree on the sky.

# Horizontes



**Figure 2.2:** The horizon problem in the conventional Big Bang model. All events that we currently observe are on our past light cone. The intersection of our past light cone with the spacelike slice labelled CMB corresponds to two opposite points in the observed CMB. Their past light cones don't overlap before they hit the singularity,  $a = 0$ , so the points appear never to have been in causal contact. The same applies to any two points in the CMB that are separated by more than 1 degree on the sky.

# 10.1 O Problema da Planicidade

Eq. de Fridmann

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \quad (1)$$

hoje ( $a=1$ )

$$1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2} \quad (2)$$

CMBR e SNIa

$$|1 - \Omega_0| \leq 0.005 \quad \Rightarrow \quad R_0 \geq \frac{14c}{H_0}$$

Por que  $\Omega_0 \approx 1$  ?

## 10.1 O Problema da Planicidade

Por que  $\Omega_0 \approx 1$  ?

Poderia ter **qualquer valor** sem violar nenhuma lei da física.

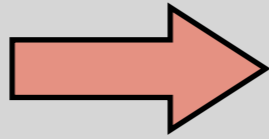
**Coincidência?** (Condições iniciais foram tais que hoje alcançam esse valor).

**Problema:** Quando extrapolamos  $\Omega(t)$  para o passado, torna-se difícil considerar uma simples coincidência.

## 10.1 O Problema da Planicidade

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \quad (1)$$

$$1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2} \quad (2)$$



Expressão para  $\Omega(t)$  na forma:

$$1 - \Omega(t) = \frac{H_0^2 (1 - \Omega_0)}{H(t)^2 a(t)^2}$$

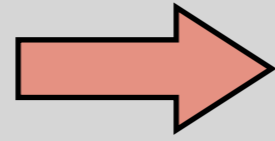


## 10.1 O Problema da Planicidade

Expressão para  $\Omega(t)$  na forma:

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \quad (1)$$

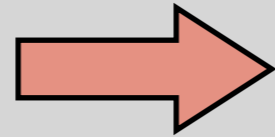
$$1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2} \quad (2)$$



$$1 - \Omega(t) = \frac{H_0^2 (1 - \Omega_0)}{H(t)^2 a(t)^2}$$

Quando o Universo era dominado por radiação e matéria:

$$t \ll t_{m\Lambda} \approx 10 \text{ Gyr}$$



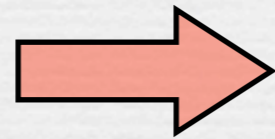
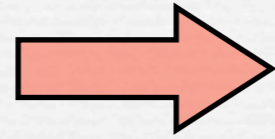
Ryden eq. (5.108)

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}$$

## 10.1 O Problema da Planicidade

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \quad (1)$$

$$1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2} \quad (2)$$



Ryden eq. (5.108)

Quando o Universo era dominado por radiação e matéria:

$$t \ll t_{m\Lambda} \approx 10 \text{ Gyr}$$

Quando o Universo era dominado por radiação e matéria, o desvio de  $\Omega$  do valor 1 cresce sempre.

Expressão para  $\Omega(t)$  na forma:

$$1 - \Omega(t) = \frac{H_0^2 (1 - \Omega_0)}{H(t)^2 a(t)^2}$$

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}$$



$$1 - \Omega(t) = \frac{(1 - \Omega_0) a^2}{\Omega_{r,0} + a \Omega_{m,0}}$$

## 10.1 O Problema da Planicidade

Quando o Universo era dominado por radiação e matéria, o desvio de  $\Omega$  do valor 1 crescia sempre.

$$1 - \Omega(t) = \frac{(1 - \Omega_0)a^2}{\Omega_{r,0} + a\Omega_{m,0}}$$

Fase dominada por radiação:

$$|1 - \Omega|_r \propto a^2 \propto t$$

Fase dominada por matéria:

$$|1 - \Omega|_m \propto a \propto t^{2/3}$$

## 10.1 O Problema da Planicidade

Quando o Universo era dominado por radiação e matéria, o desvio de  $\Omega$  do valor 1 crescia sempre.

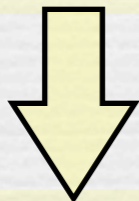
**Ex: ~ Benchmark model**

$$\Omega_{r,0} \approx 9.0 \times 10^{-5}$$

$$\Omega_{m,0} \approx 0.31$$

$$\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.69$$

$$|1 - \Omega_0| \leq 0.005$$



$$a_{rm} \approx 2.9 \times 10^{-4} \longrightarrow |1 - \Omega|_{rm} \leq 2 \times 10^{-6}$$

$$a_{nuc} \approx 3.6 \times 10^{-9} \longrightarrow |1 - \Omega|_{nuc} \leq 7 \times 10^{-16}$$

$$a_P \approx 2 \times 10^{-32} \longrightarrow |1 - \Omega|_P \leq 2 \times 10^{-62}$$

$$1 - \Omega(t) = \frac{(1 - \Omega_0)a^2}{\Omega_{r,0} + a\Omega_{m,0}}$$

Fase dominada por radiação:

$$|1 - \Omega|_r \propto a^2 \propto t$$

Fase dominada por matéria:

$$|1 - \Omega|_m \propto a \propto t^{2/3}$$

## 10.1 O Problema da Planicidade

$$|1 - \Omega|_P \leq 2 \times 10^{-62}$$

### Considerações:

Para mudar a massa do Sol por esse fator, seria necessário adicionar / remover um vigésimo de um elétron.

Se  $|1 - \Omega|_{\text{nuc}}$  tivesse sido de uma parte em um milhão (ao invés de 1 em um quatrilhão), o Universo teria colapsado em um Big Crunch ou expandido em um Big Chill em apenas algumas décadas.

## 10.2 O Problema do Horizonte

O modelo do Big Bang não explica a homogeneidade e isotropia em grande escala no Universo.

Distância própria atual até a última superfície de espalhamento (LS) da CMBR:

$$d_p(t_0) = c \int_{t_{1s}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

$$t_{1s} \ll t_0 \Rightarrow d_p(t_0) \lesssim d_{\text{hor}}(t_0)$$

Modelo Benchmark:  $d_p(t_0) = 0.98d_{\text{hor}}(t_0)$

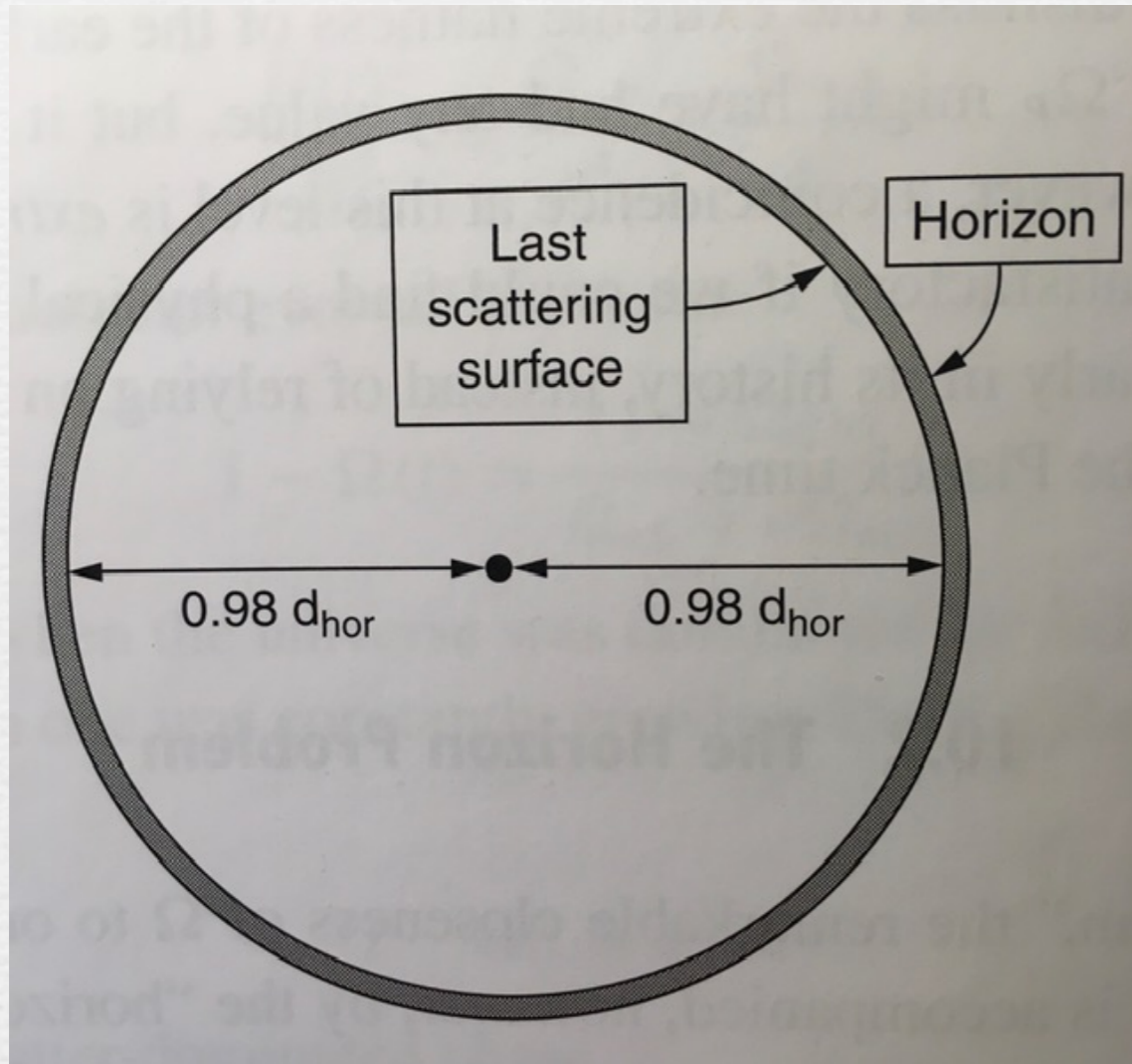
## 10.2 O Problema do Horizonte

Do observador até um ponto da LS:

$$d_p(t_0) = 0.98d_{\text{hor}}(t_0)$$

Separação entre dois pontos antipodais da LS:

$$d_p(t_0)[180^\circ] = 1.96d_{\text{hor}}(t_0)$$



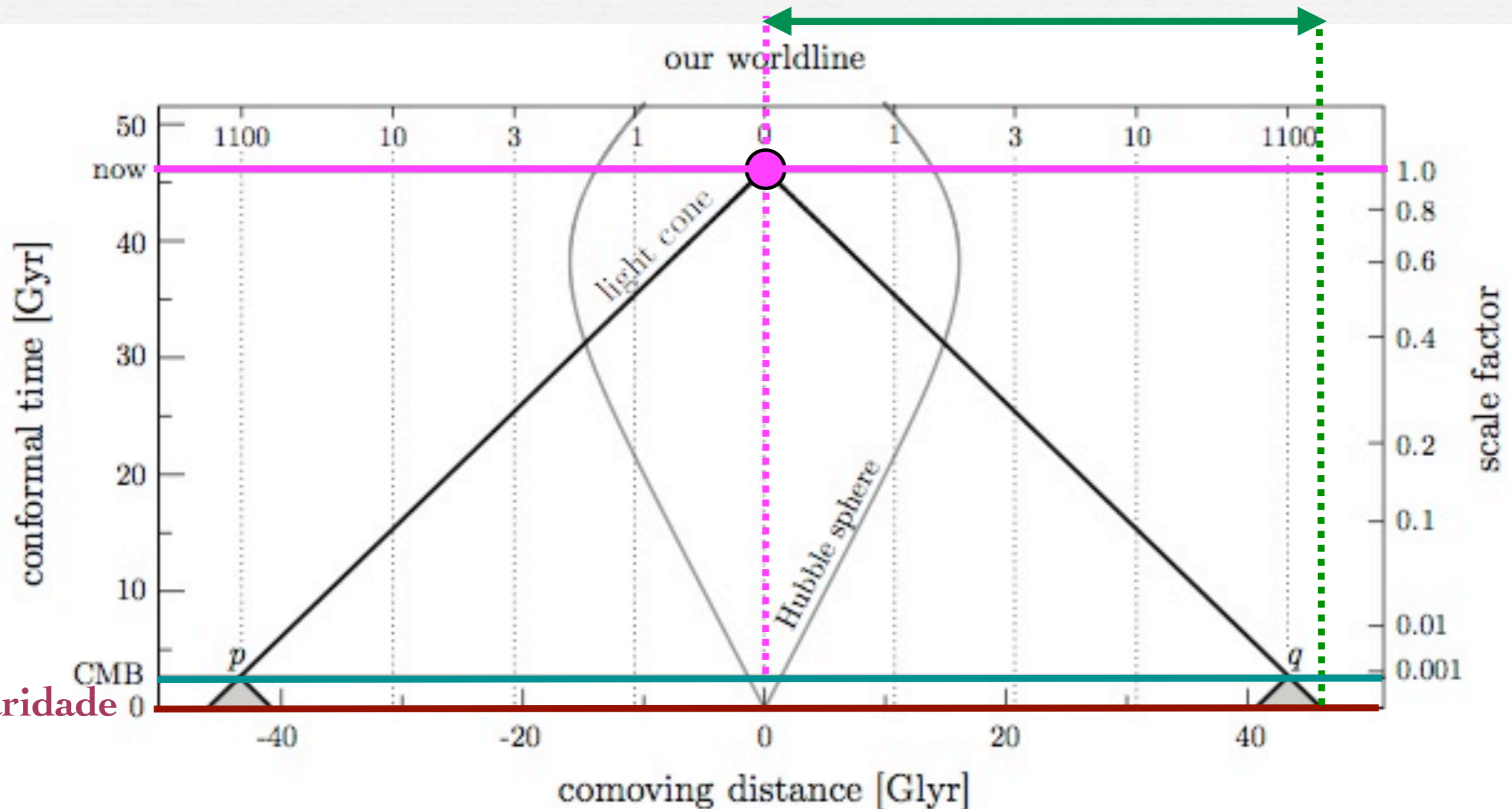
Como a distância entre dois pontos antipodais da LS é maior do que a distância ao horizonte, esses pontos estão desconectados causalmente.

**Não houve tempo para que essas duas regiões entrassem em equilíbrio termodinâmico.**

(Mas elas têm a mesma temperatura, dentro de 1 parte em  $10^5$ ).

## 10.2 O Problema do Horizonte

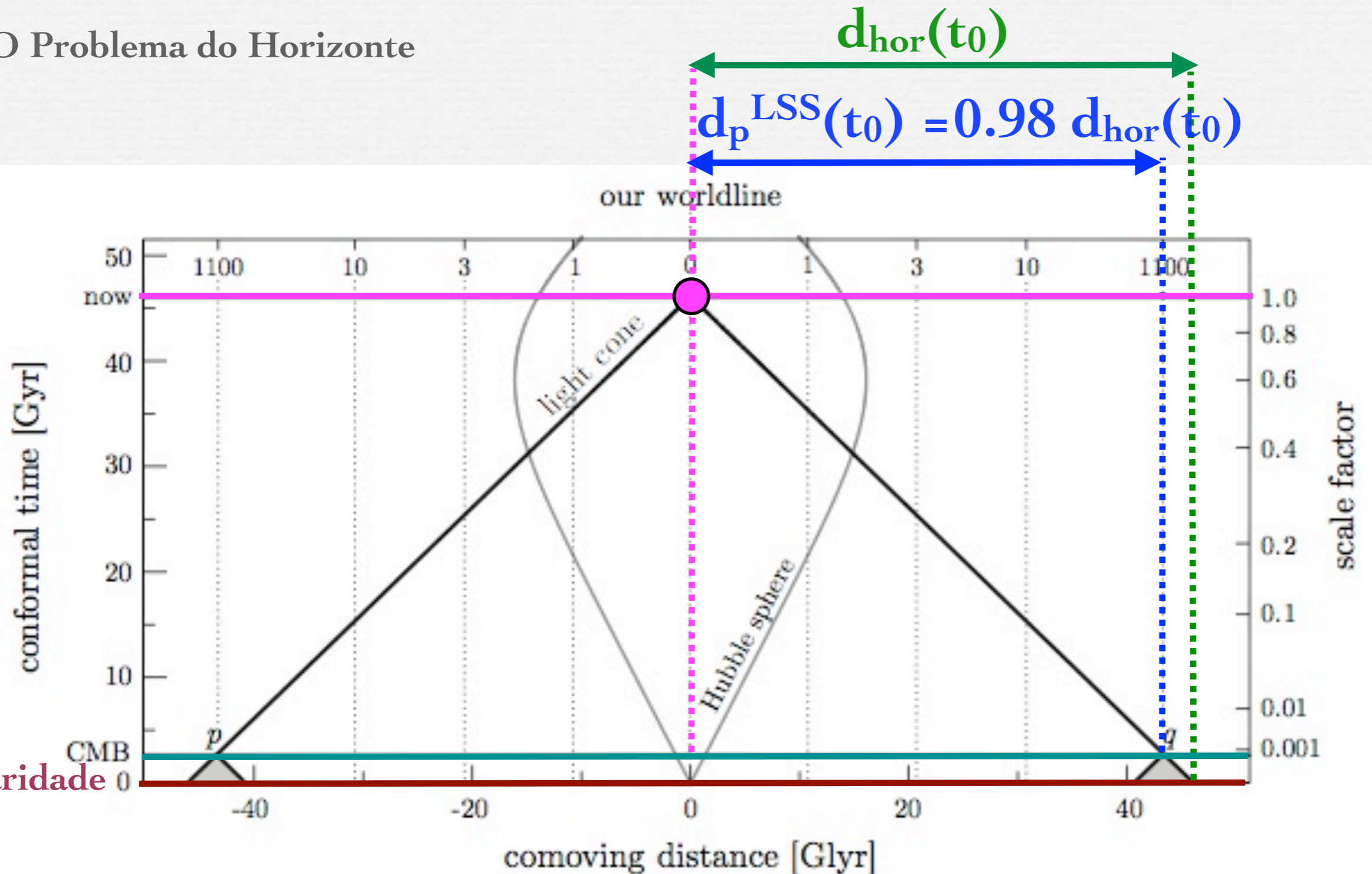
$$d_{\text{hor}}(t_0) = 14 \text{ Gpc}$$



**Figure 2.2:** The horizon problem in the conventional Big Bang model. All events that we currently observe are on our past light cone. The intersection of our past light cone with the spacelike slice labelled CMB corresponds to two opposite points in the observed CMB. Their past light cones don't overlap before they hit the singularity,  $a = 0$ , so the points appear never to have been in causal contact. The same applies to any two points in the CMB that are separated by more than 1 degree on the sky.

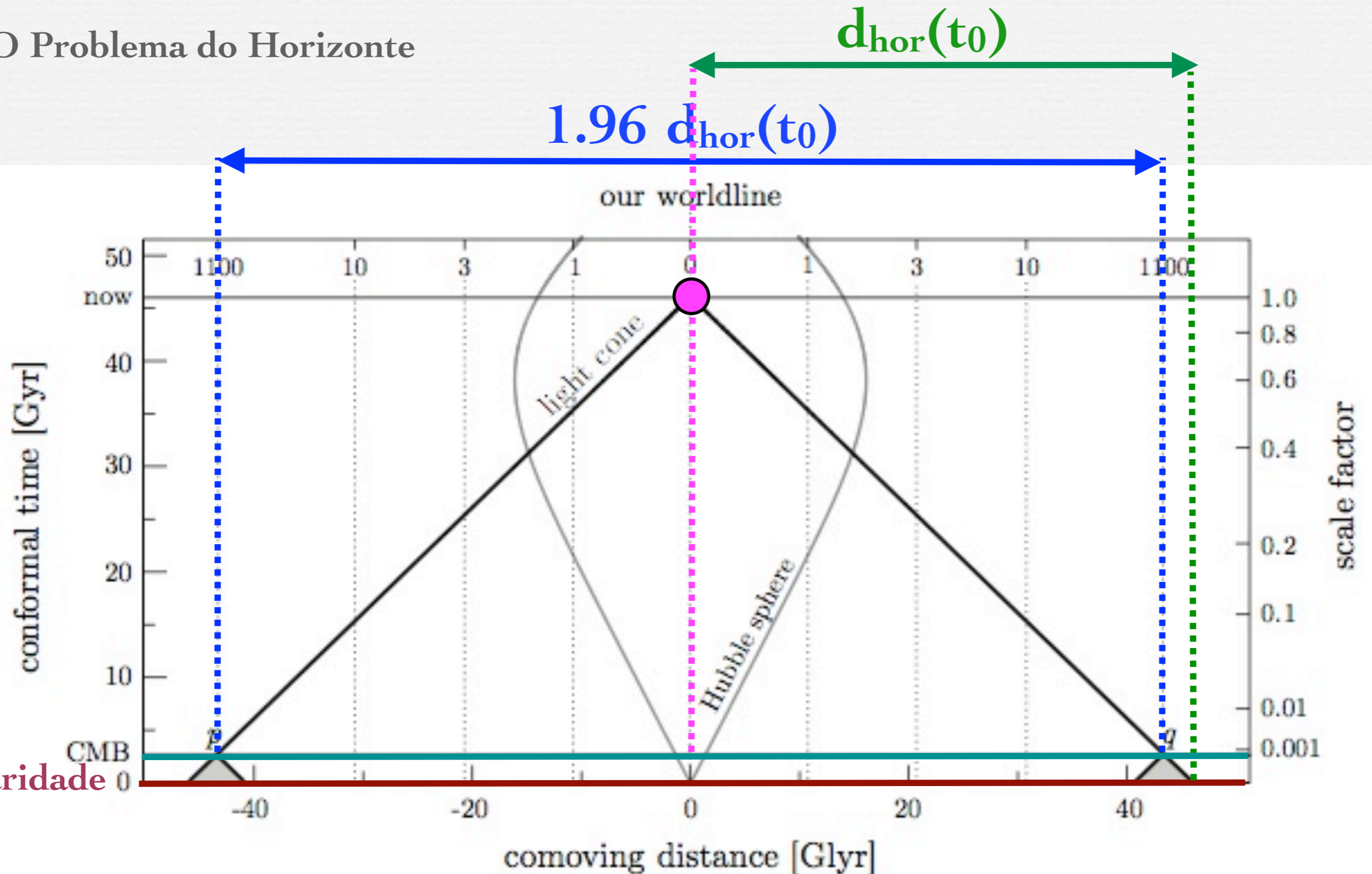


## 10.2 O Problema do Horizonte



**Figure 2.2:** The horizon problem in the conventional Big Bang model. All events that we currently observe are on our past light cone. The intersection of our past light cone with the spacelike slice labelled CMB corresponds to two opposite points in the observed CMB. Their past light cones don't overlap before they hit the singularity,  $a = 0$ , so the points appear never to have been in causal contact. The same applies to any two points in the CMB that are separated by more than 1 degree on the sky.

## 10.2 O Problema do Horizonte



singularidade

**Figure 2.2:** The horizon problem in the conventional Big Bang model. All events that we currently observe are on our past light cone. The intersection of our past light cone with the spacelike slice labelled CMB corresponds to two opposite points in the observed CMB. Their past light cones don't overlap before they hit the singularity,  $a = 0$ , so the points appear never to have been in causal contact. The same applies to any two points in the CMB that are separated by more than 1 degree on the sky.

## 10.2 O Problema do Horizonte

Na época do LS (Ryden, eq. 8.56):

$$d_{\text{hor}}(t_{\text{ls}}) = 0.251 \text{ Mpc}$$

Pontos separados por mais do que 0.251 Mpc nessa época não estavam em contato causal.

$$d_A \approx 12.8 \text{ Mpc}$$

Distância em diâmetro angular até a LS (Ryden, sec. 8.4).  $d_A \approx d_{\text{hor}} / z_{\text{ls}}$

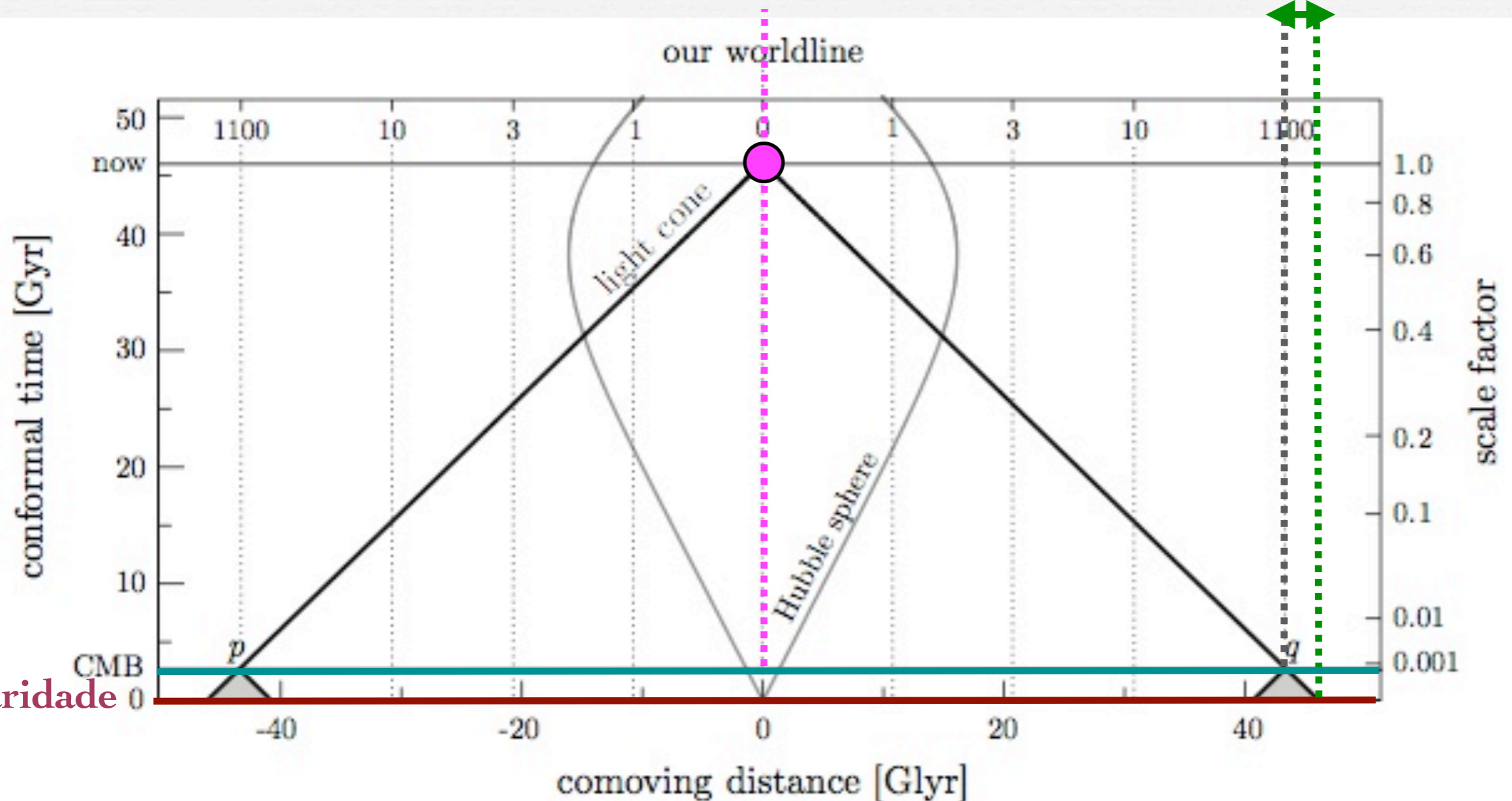
Pontos na LS separados por uma distância igual à distância do horizonte terão uma separação angular (vista hoje, da Terra) de:

$$\theta_{\text{hor}} = \frac{d_{\text{hor}}(t_{\text{ls}})}{d_A} \approx \frac{0.251 \text{ Mpc}}{12.8 \text{ Mpc}} \approx 0.020 \text{ rad} \approx 1.1^\circ$$

**Porém** observamos que pontos da CMBR separados por ângulos maiores do que  $1.1^\circ$  ( $\ell < 160$ ) **têm a mesma  $T_0 = 2.7255$**  (dentro de 1 parte em  $10^5$ ).

## 10.2 O Problema do Horizonte

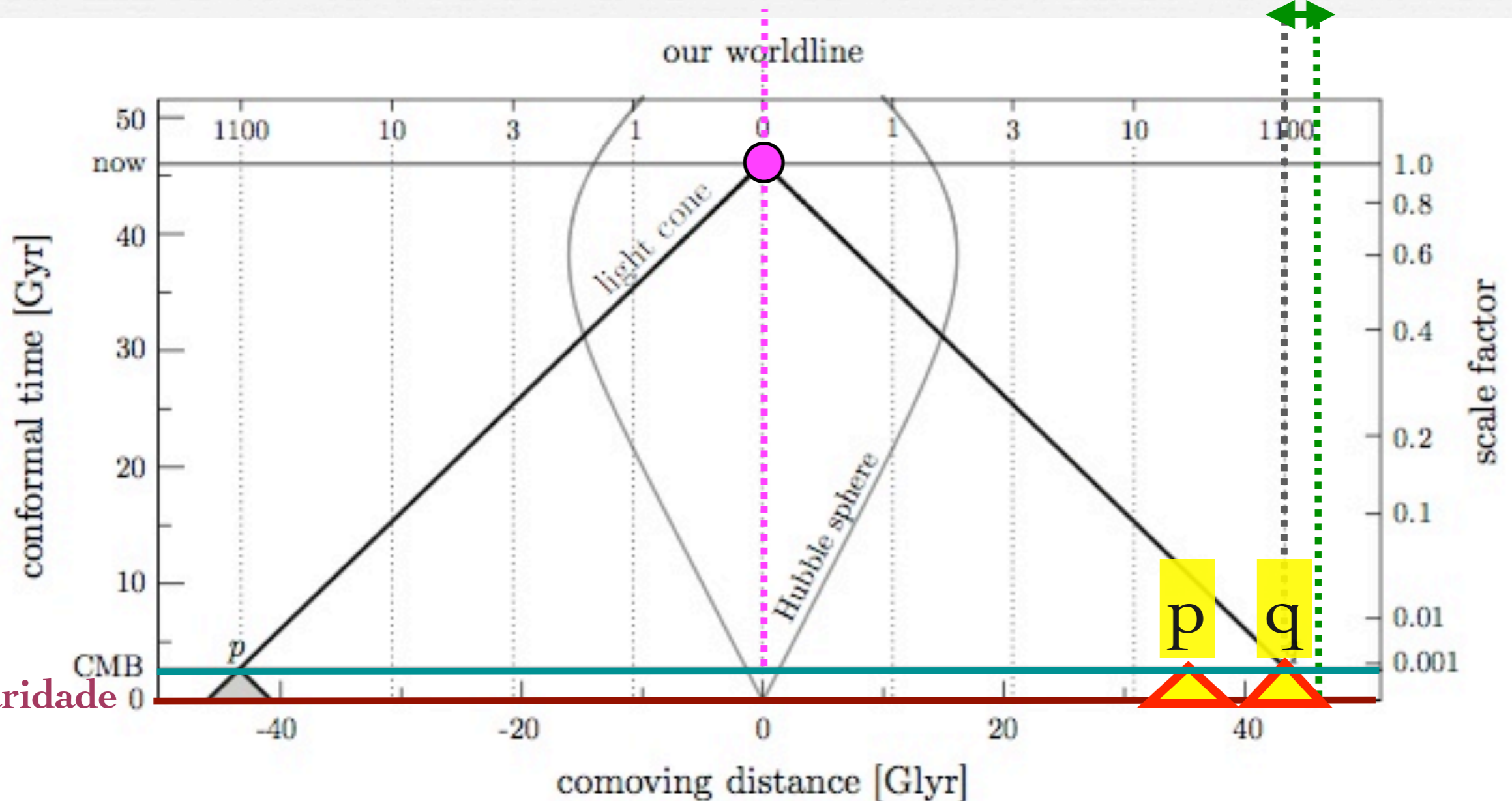
$$d_{\text{hor}}(t_{\text{LSS}}) = 0.251 \text{ Mpc}$$



**Figure 2.2:** The horizon problem in the conventional Big Bang model. All events that we currently observe are on our past light cone. The intersection of our past light cone with the spacelike slice labelled CMB corresponds to two opposite points in the observed CMB. Their past light cones don't overlap before they hit the singularity,  $a = 0$ , so the points appear never to have been in causal contact. The same applies to any two points in the CMB that are separated by more than 1 degree on the sky.

## 10.2 O Problema do Horizonte

$$d_{\text{hor}}(t_{\text{LSS}}) = 0.251 \text{ Mpc}$$



**Figure 2.2:** The horizon problem in the conventional Big Bang model. All events that we currently observe are on our past light cone. The intersection of our past light cone with the spacelike slice labelled CMB corresponds to two opposite points in the observed CMB. Their past light cones don't overlap before they hit the singularity,  $a = 0$ , so the points appear never to have been in causal contact. The same applies to any two points in the CMB that are separated by more than 1 degree on the sky.

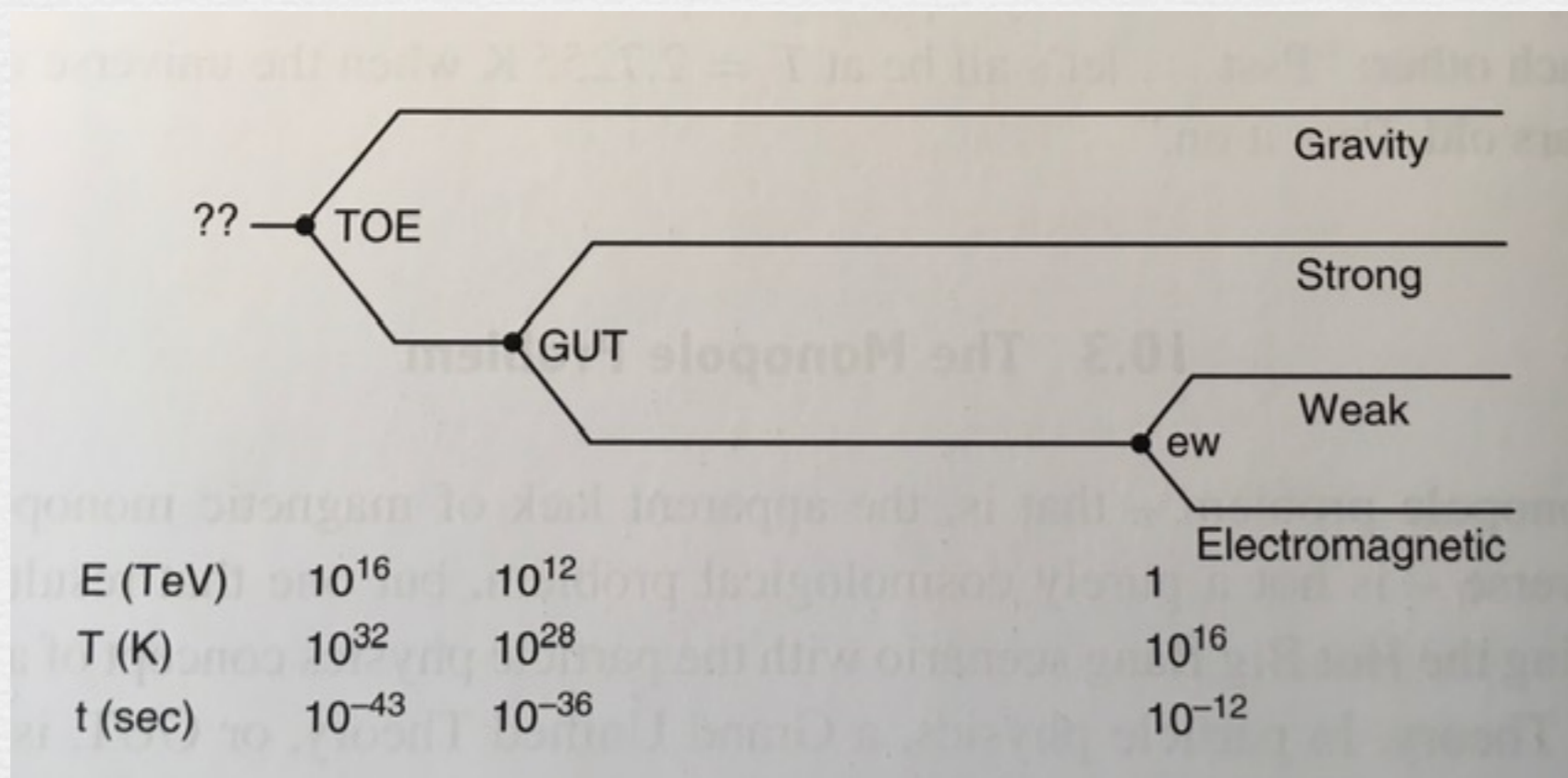
# 10.3 O Problema do Monopolo

Aparece no contexto do modelo do Big Bang  
+ teorias de grande unificação (GUT)

## Teoria eletrofraca

(Weinberg, Salam, Glashow - Nobel, 1979)

$$E_{ew} \sim 1 \text{ TeV} \Rightarrow T_{ew} \sim E_{ew}/k \sim 10^{16} \text{ K} \Rightarrow t_{ew} \sim 10^{-12} \text{ s}$$



## 10.3 O Problema do Monopolo

Uma das previsões do GUT é que o Universo teria passado por uma transição de fase quando  $T < T_{\text{GUT}}$ .

**Transição de fase:** fenômeno associado com perda espontânea de simetria do sistema quando sua temperatura cai abaixo de um certo valor.

**Ex:**

A **água** é líquida para  $T > 273 \text{ K}$ : moléculas de  $\text{H}_2\text{O}$  são orientadas randomicamente gerando simetria rotacional em torno de qualquer ponto (isotropia).

Quando  $T < 273 \text{ K}$ , a água passa por uma transição de fase (de líquida para sólida), com perda da simetria rotacional, gerando um cristal anisotrópico, com eixos preferenciais de simetria.

## 10.3 O Problema do Monopolo

Uma das previsões do GUT é que o Universo teria passado por uma transição de fase quando  $T < T_{\text{GUT}}$ .

**Transição de fase:** fenômeno associado com perda espontânea de simetria do sistema quando sua temperatura cai abaixo de um certo valor.

De forma análoga:

Ocorre uma perda de simetria quando o Universo percorre a **transição de fase do GUT** em  $t_{\text{GUT}} \sim 10^{-36}$  s.

Em  $T > T_{\text{GUT}}$ , havia uma simetria entre as forças nuclear forte e eletrofraca.

Em  $T < T_{\text{GUT}}$ , a simetria é espontaneamente perdida e essas forças desacoplam e começam a ter propriedades diferentes.



Uma das previsões do GUT é que o Universo teria passado por uma transição de fase quando  $T < T_{\text{GUT}}$ .

**Transição de fase:** fenômeno associado com perda espontânea de simetria do sistema quando sua temperatura cai abaixo de um certo valor.



**Defeitos topológicos**

**Ex:**

2D: domain wall

1D: cosmic strings

0D (pontual): monopolos magnéticos

### monopolos magnéticos ( $M$ )

Energia de repouso dos  $M$  criados na fase de transição do GUT:

$$m_M c^2 \sim E_{\text{GUT}} \sim 10^{12} \text{ TeV}$$

(comparável a 1 ng ~ massa de uma bactéria)

Na fase de transição do GUT, pontos mais afastados do que o tamanho do horizonte estarão fora do contato causal.

Assim, esperamos aproximadamente **1 defeito topológico por volume de horizonte.**

## 10.3 O Problema do Monopolo

### monopolos magnéticos ( $M$ )

A densidade numérica de  $M$  na época de suas criações seria:

$$n_M(t_{\text{GUT}}) \sim \frac{1}{(2ct_{\text{GUT}})^3} \sim 10^{82} \text{ m}^{-3}$$

$$d_{\text{hor}}(t_{\text{GUT}}) = c \int_0^{t_{\text{GUT}}} \frac{dt}{(t/t_{\text{GUT}})^{1/2}} = 2ct_{\text{GUT}}$$

a(t): era da radiação

A densidade de energia de  $M$  na época de suas criações seria:

$$\epsilon_M(t_{\text{GUT}}) \sim (m_M c^2) n_M \sim 10^{94} \text{ TeV m}^{-3}$$

Comparar com a densidade de energia de radiação na mesma época:

$$\epsilon_\gamma(t_{\text{GUT}}) \approx \alpha T_{\text{GUT}}^4 \sim 10^{104} \text{ TeV m}^{-3}$$

### monopolos magnéticos ( $M$ )

Energia de repouso dos  $M$  criados na fase de transição do GUT:

$$m_M c^2 \sim E_{\text{GUT}} \sim 10^{12} \text{ TeV}$$

(comparável a 1 ng ~ massa de uma bactéria)

Sendo bastante massivos, os  $M$  rapidamente se tornam não-relativísticos, com:  $\epsilon_M \propto a^{-3}$

Já a radiação:  $\epsilon_\gamma \propto a^{-4}$

Os  $M$  teriam dominado a densidade de energia quando a temperatura cai de:  $T \sim 10^{-10} T_{\text{GUT}} \sim 10^{18} \text{ K}$  ( $t \sim 10^{-16} \text{ s}$ )

### monopolos magnéticos ( $M$ )

Porém, não há nenhuma evidência de que a densidade de energia dos  $M$  domina hoje, e provavelmente eles nem devem existir.

**Limite superior:**

$$n_M(t_0) < 10^{-29} n_{\text{bar}}(t_0)$$

$$\Omega_M(t_0) < 5 \times 10^{-16}$$

## 10.4 A Solução via Inflação

**Inflação:** um período no Universo primordial com expansão acelerada.


$$\ddot{a} > 0$$

**Inflação:** um período no Universo primordial com expansão acelerada.

$$\ddot{a} > 0$$

Equação de aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\epsilon + 3P) \quad (10)$$


$$\ddot{a} > 0$$

Equação de estado:

$$P = w\epsilon$$

$$P < -\frac{\epsilon}{3} \quad w < -\frac{1}{3}$$

A mais simples implementação da inflação é o Universo temporariamente atender à:

$$w = -1$$

**Inflação:** um período no Universo primordial com expansão acelerada.

$$\ddot{a} > 0$$

Equação de aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\epsilon + 3P) \quad (10)$$

$$w = -1$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda_i}{3} > 0$$



**Inflação:** um período no Universo primordial com expansão acelerada.

$$\ddot{a} > 0$$

$$w = -1$$

Equação de aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda_i}{3} > 0$$

Equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda_i}{3} \Rightarrow H_i = \left(\frac{\Lambda_i}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

O fator de escala cresce exponencialmente na fase inflacionária:

$$a(t) \propto \exp(H_i t)$$

## 10.4 A Solução via Inflação

Suponhamos que o Universo teve um período de expansão exponencial em algum momento em meio à época primordial de dominância da radiação, com uma transição imediata entre esses períodos, isto é:

$$a(t) = \begin{cases} a_i (t/t_i)^{1/2} & (t < t_i) \\ a_i e^{H_i(t-t_i)} & (t_i < t < t_f) \\ a_i e^{H_i(t-t_i)} (t/t_i)^{1/2} & (t > t_f) \end{cases}$$

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^N \quad (t_i < t < t_f)$$

taxa de crescimento  
do fator de escala  
durante a inflação

$$N \equiv H_i(t_f - t_i)$$

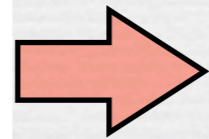
número de “e-foldings”

Tomemos um possível **modelo de inflação**:

$$t_i \approx t_{\text{GUT}} \approx 10^{-36} \text{ s}$$

$$t_f \approx (N + 1)t_{\text{GUT}}$$

$$H_i \approx t_{\text{GUT}}^{-1} \approx 10^{36} \text{ s}^{-1}$$



$$\epsilon_i = \frac{c^2}{8\pi G} \Lambda_i = \frac{3c^2}{8\pi G} H_i^2 \sim 10^{105} \text{ TeV m}^{-3}$$

**comparar com:**  $\epsilon_{\Lambda,0} \sim 0.0034 \text{ TeV m}^{-3}$

**Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?**

### 1) Planicidade

Eq. de Fridmann

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \quad (1)$$

Para qualquer universo não-plano

$$|1 - \Omega(t)| = \frac{c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}$$

Durante a inflação

$$H(t) = H_i = \text{const.} \quad a(t) \propto \exp(H_i t)$$

Diferença c/ relação ao valor 1 aumenta exponencialmente

$$|1 - \Omega(t)| \propto \exp(-2H_i t)$$

# Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?

## 1) Planicidade

Comparando o parâmetro de densidade no início da inflação com seu valor no final da inflação:

$$|1 - \Omega(t_f)| = \exp(-2N)|1 - \Omega(t_i)|$$

Suponha que, antes da inflação, o Universo era fortemente curvo:

$$|1 - \Omega(t_i)| \sim 1$$

Logo após a inflação, teremos:

$$|1 - \Omega(t_f)| \sim \exp(-2N)$$

**Quantidade de aplanamento causada pela inflação.**

## Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?

### 1) Planicidade

Após a inflação, na era dominada por radiação e na era dominada pela matéria, esse desvio do parâmetro de densidade em relação a 1 continuará aumentando.

$$t_f = (N + 1)t_i \approx (N + 1) \times 10^{-36} \text{ s} \Rightarrow a(t_f) \approx 2 \times 10^{-28} \sqrt{N + 1}$$

**Ex: ~ Benchmark model**

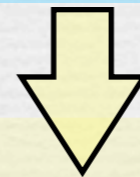
$$\Omega_{r,0} \approx 9.0 \times 10^{-5}$$

$$\Omega_{m,0} \approx 0.31$$

$$\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.69$$

$$|1 - \Omega_0| \leq 0.005$$

$$1 - \Omega(t) = \frac{(1 - \Omega_0)a^2}{\Omega_{r,0} + a\Omega_{m,0}}$$



$$|1 - \Omega(t_f)| \leq 2 \times 10^{-54} (N + 1)$$

**Quantidade que aplanamento imposta a partir das observações atuais**

**Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?**

### 1) Planicidade

$$|1 - \Omega(t_f)| \sim \exp(-2N)$$

**Quantidade de aplanamento causada pela inflação.**

$$|1 - \Omega(t_f)| \leq 2 \times 10^{-54} (N + 1)$$

**Quantidade de aplanamento imposta a partir das observações atuais**

$$N \approx 60$$

(Pode ser bem maior).

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \sim \exp(60) \sim 10^{26}$$

**Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?**

## 2) Horizonte

$$d_{\text{hor}}(t) = a(t)c \int_0^t \frac{dt}{a(t)}$$

$$d_{\text{hor}}(t_i) = a_i c \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i (t/t_i)^{1/2}} = 2ct_i$$

Distância ao horizonte antes do início da inflação (dominância da radiação).

Distância ao horizonte ao final da inflação:

$$d_{\text{hor}}(t_f) = a_i e^N c \left( \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i (t/t_i)^{1/2}} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a_i \exp[H_i(t - t_i)]} \right)$$

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^N \quad (t_i < t < t_f)$$



**Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?**

**2) Horizonte**  $d_{\text{hor}}(t_f) = a_i e^N c \left( \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i (t/t_i)^{1/2}} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a_i \exp[H_i(t - t_i)]} \right)$

$$d_{\text{hor}}(t_f) = e^N c (2t_i + H_i^{-1})$$

Distância ao horizonte cresce exponencialmente

Durante o período da inflação, obtemos um aumento enorme do horizonte:

$$d_{\text{hor}}(t_i) = 2ct_i \approx 6 \times 10^{-28} \text{ m}$$

$$d_{\text{hor}}(t_f) \approx e^N 3ct_i \sim 15 \text{ m}$$

$$\Delta t_{\text{infl}} \sim 10^{-34} \text{ s}$$

$$t_i \approx 10^{-36} \text{ s}$$

$$N = 65 \quad H_i \approx t_i^{-1}$$

## 10.4 A Solução via Inflação

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^N \quad (t_i < t < t_f)$$

taxa de crescimento  
do fator de escala  
durante a inflação

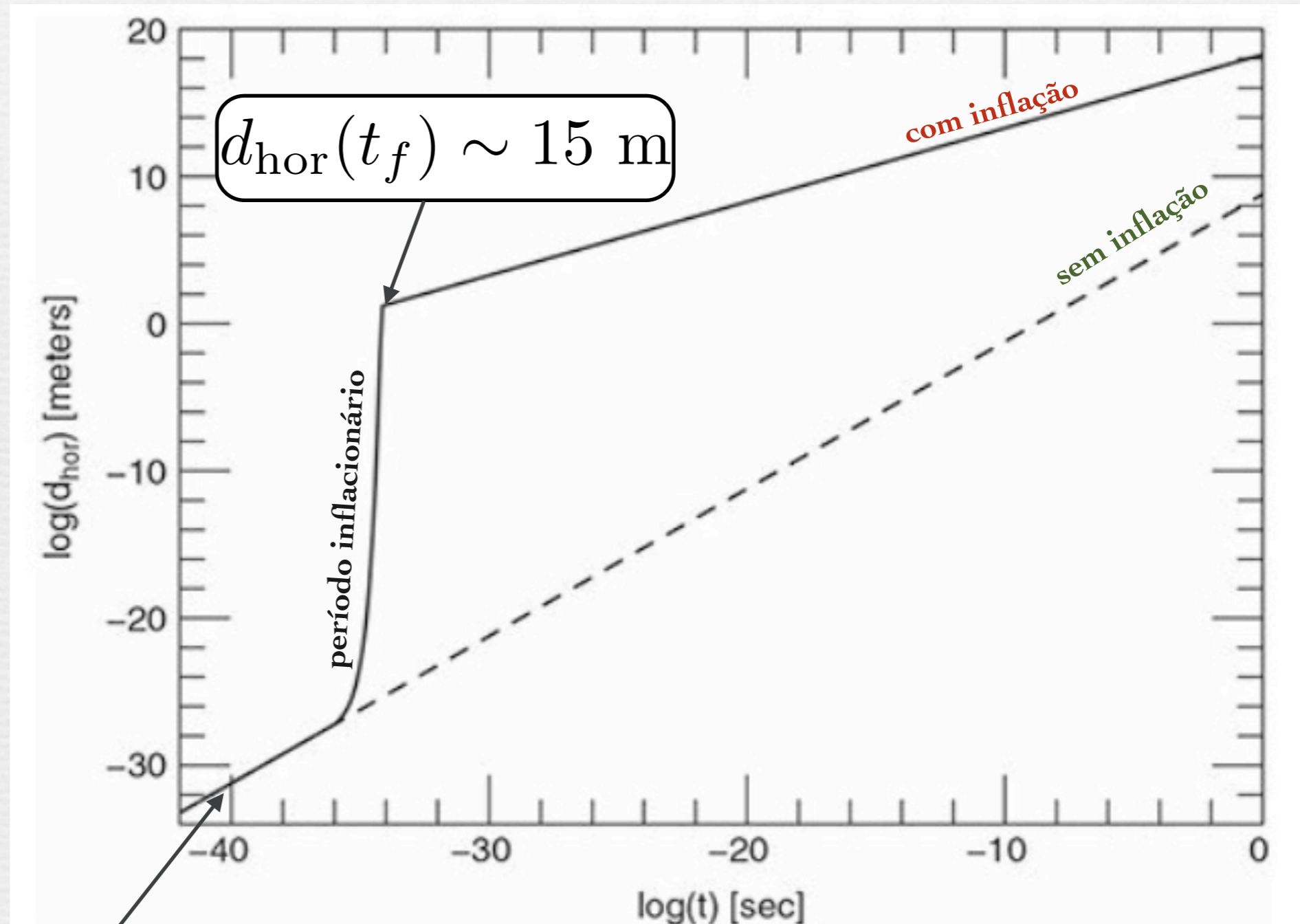
$$N \equiv H_i(t_f - t_i)$$

número de “e-foldings”

Se a **duração da inflação**,  $t_f - t_i$ , foi **longa** comparada com o **tempo de Hubble** durante a inflação,  $H_i^{-1}$ , então  $N$  é um número grande, resultando em um crescimento enorme do fator de escala.

Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?

## 2) Horizonte



$$d_{\text{hor}} \propto a \propto t^{1/2}$$

**Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?**

### 2) Horizonte

**(Comparação na LSS...)**

Com inflação:

$$d_{\text{hor}}(t_{\text{ls}}) \sim 200 \text{ Mpc}$$

Sem inflação:

$$d_{\text{hor}}(t_{\text{ls}}) \sim 0.25 \text{ Mpc}$$

**Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?**

**2) Horizonte**

Com inflação:

$$d_{\text{hor}}(t_{\text{ls}}) \sim 200 \text{ Mpc}$$

Sem inflação:

$$d_{\text{hor}}(t_{\text{ls}}) \sim 0.25 \text{ Mpc}$$

Considere todo o Universo visível hoje (limitado pela última superfície de espalhamento “LSS” da CMBR). Temos que a distância própria até LSS, hoje, é:

$$d_p^{vis}(t_0) \sim 14000 \text{ Mpc}$$

$$d_p^{vis}(t_f) = a_f d_p^{vis}(t_0)$$

$$\sim 3 \times 10^{-23} \text{ Mpc}$$

$$\sim 0.9 \text{ m}$$

$$d_{\text{hor}}(t_f) \sim 15 \text{ m}$$



$$a(t_f) \sim 2 \times 10^{-27}$$

**Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?**

## 2) Horizonte

Com inflação:

$$d_{\text{hor}}(t_{\text{ls}}) \sim 200 \text{ Mpc}$$

$$a(t_{\text{ls}}) = 9.1 \times 10^{-4}$$

$$d_{\text{hor}}(t_f) \sim 15 \text{ m}$$

$$a(t_f) \sim 2 \times 10^{-27}$$

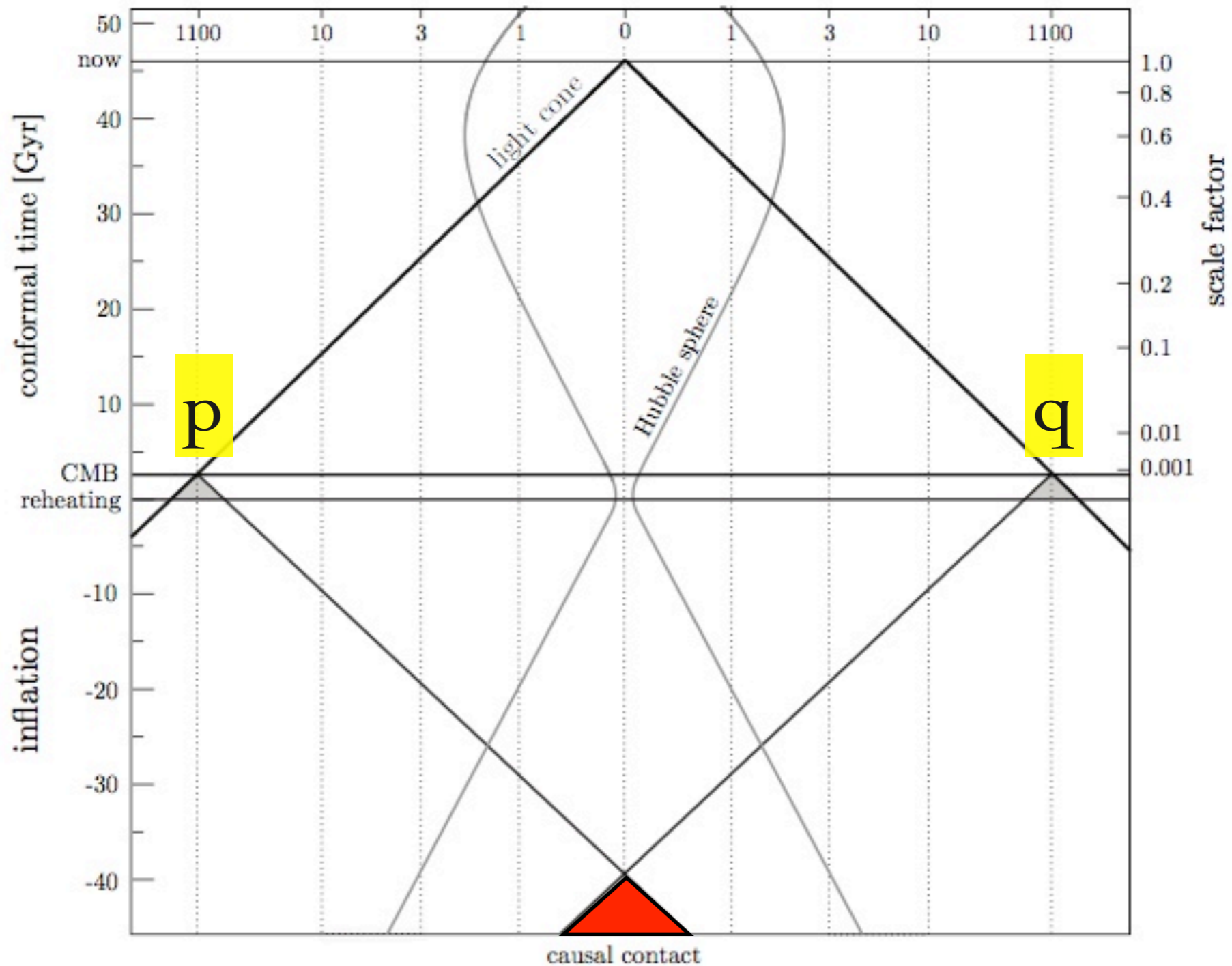
**é 800 x maior**

Sem inflação:

$$d_{\text{hor}}(t_{\text{ls}}) \sim 0.25 \text{ Mpc}$$

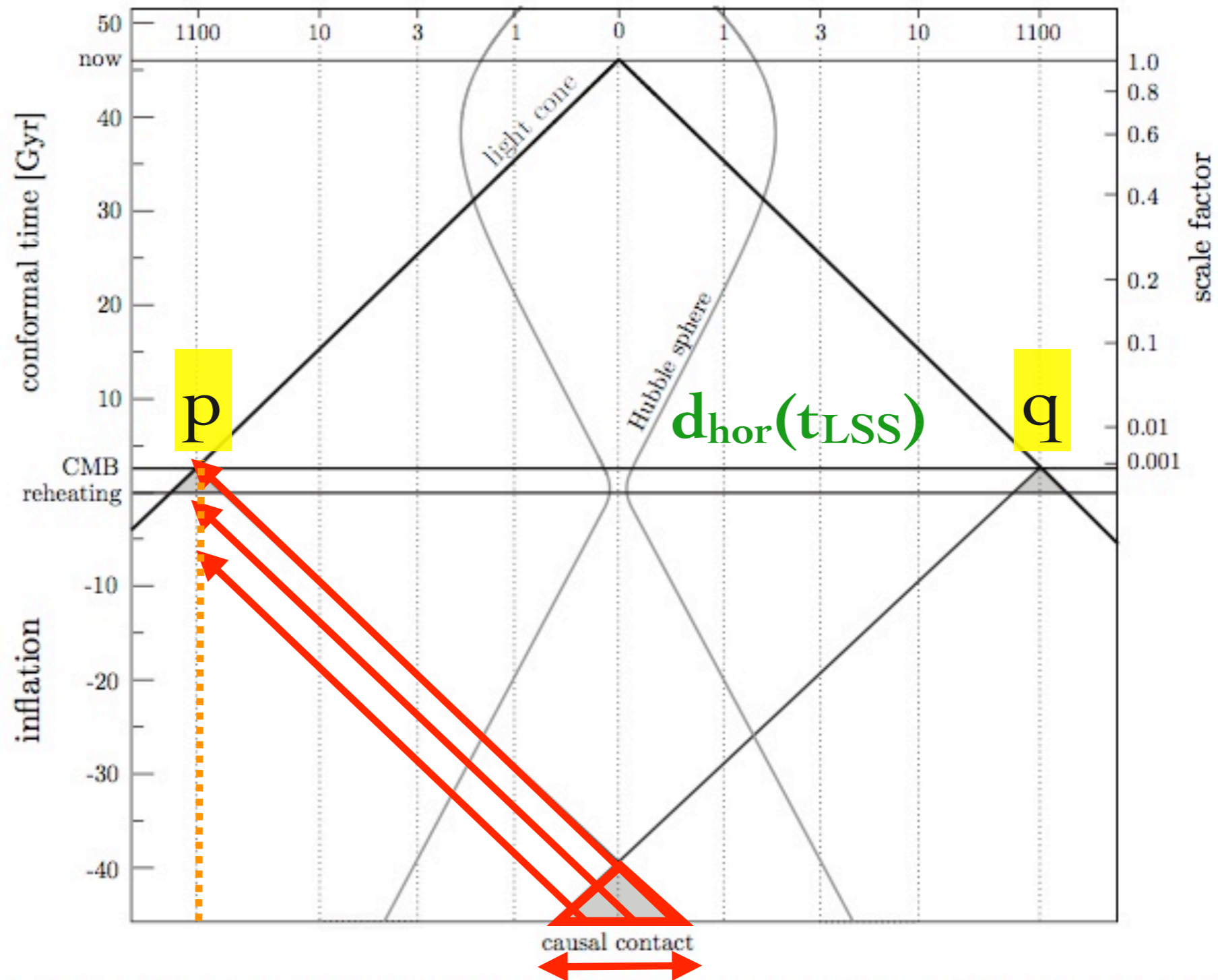
Suficientemente grande para que os pontos antipodais na LSS fossem causalmente conectados.

## 10.4 A Solução via Inflação



**Figure 2.3:** Inflationary solution to the horizon problem. The comoving Hubble sphere shrinks during inflation and expands during the conventional Big Bang evolution (at least until dark energy takes over at  $a \approx 0.5$ ). Conformal time during inflation is negative. The spacelike singularity of the standard Big Bang is replaced by the reheating surface, i.e. rather than marking the beginning of time it now corresponds simply to the transition from inflation to the standard Big Bang evolution. All points in the CMB have overlapping past light cones and therefore originated from a causally connected region of space.

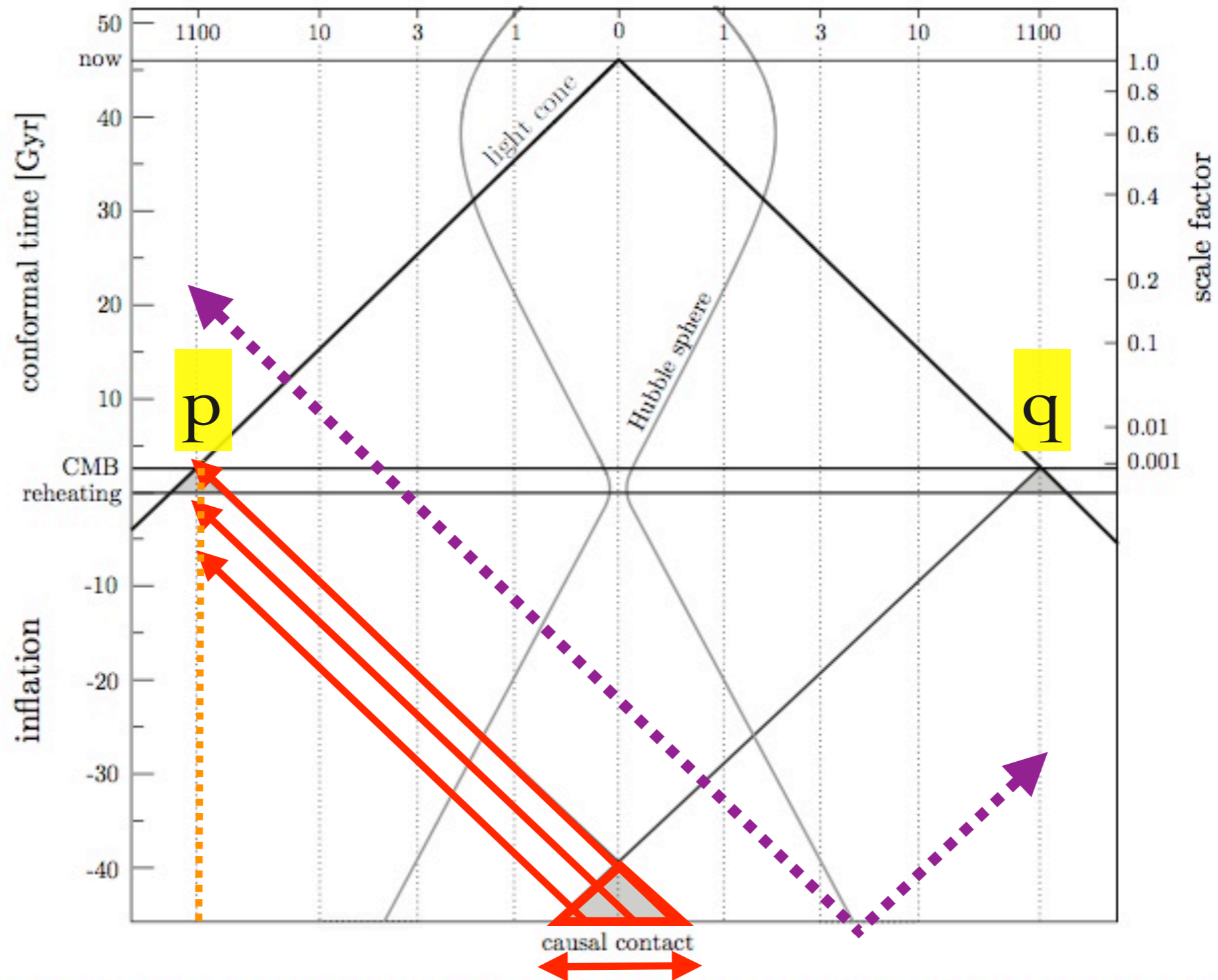
## 10.4 A Solução via Inflação



**Figure 2.3:** Inflationary solution to the horizon problem. The comoving Hubble sphere shrinks during inflation and expands during the conventional Big Bang evolution (at least until dark energy takes over at  $a \approx 0.5$ ). Conformal time during inflation is negative. The spacelike singularity of the standard Big Bang is replaced by the reheating surface, i.e. rather than marking the beginning of time it now corresponds simply to the transition from inflation to the standard Big Bang evolution. All points in the CMB have overlapping past light cones and therefore originated from a causally connected region of space.



## 10.4 A Solução via Inflação



**Figure 2.3:** Inflationary solution to the horizon problem. The comoving Hubble sphere shrinks during inflation and expands during the conventional Big Bang evolution (at least until dark energy takes over at  $a \approx 0.5$ ). Conformal time during inflation is negative. The spacelike singularity of the standard Big Bang is replaced by the reheating surface, i.e. rather than marking the beginning of time it now corresponds simply to the transition from inflation to the standard Big Bang evolution. All points in the CMB have overlapping past light cones and therefore originated from a causally connected region of space.

**Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?**

### 2) Horizonte

E antes da inflação?

Imediatamente antes do período inflacionário, o Universo atualmente visível estava reduzido à uma esfera de raio próprio:

$$d_p^{vis}(t_i) = e^{-N} d_p^{vis}(t_f) \sim 4 \times 10^{-29} \text{ m}$$

$N = 65$

Comparar com o tamanho do horizonte imediatamente antes da inflação:

$$d_{\text{hor}}(t_i) = 2ct_i \approx 6 \times 10^{-28} \text{ m}$$

**Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?**

### 2) Horizonte

$$d_p^{vis}(t_i) = e^{-N} d_p^{vis}(t_f) \sim 4 \times 10^{-29} \text{ m}$$

$$d_p^{vis}(t_f) \sim 0.9 \text{ m}$$

$$d_{\text{hor}}(t_i) = 2ct_i \approx 6 \times 10^{-28} \text{ m}$$

$$d_{\text{hor}}(t_f) \sim 15 \text{ m}$$

Portanto, o volume do Universo visível hoje, para um número mínimo de e-foldings, teve tempo de trocar informação (contato causal) e alcançar uniformidade antes do início da inflação.

**Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?**

### 2) Horizonte

**Nota:** estritamente, todas as “distâncias ao horizonte” mencionadas em aulas anteriores devem se referir não à distância atravessada pela luz desde o Big Bang (“ $t=0$ ”) mas sim desde o fim da inflação (“ $t \sim 10^{-34}$  s”).

## Como a inflação resolve os problemas de planicidade, do horizonte e do monopolo?

### 3) Monopolo

Se monopolos magnéticos foram criados antes ou durante a inflação, então a densidade numérica  $n_M$  de monopolos teria sido diluída a um nível não-detectável hoje.

$n_M \propto e^{-3H_i t}$  No período inflacionário, se monopolos não foram destruídos ou criados.

$$n_M(t_{\text{GUT}}) \approx 10^{82} \text{ m}^{-3}$$

$$n_M(t_f) = e^{-195} n_M(t_{\text{GUT}}) \approx 0.002 \text{ m}^{-3}$$

$$a(t_f) \sim 2 \times 10^{-27} \mapsto a_0 = 1, \text{ temos:}$$

$$n_M(t_0) \approx 2 \times 10^{-83} \text{ m}^{-3} \approx 5 \times 10^{-16} \text{ Mpc}^{-3}$$

## 10.5 A Física da Inflação

### *Algumas questões:*

- O que “aciona” a inflação em  $t = t_i$  e a “desliga” em  $t = t_f$ ?
- Por que a inflação não reduz também os fótons para níveis não-detectáveis?
- Se a inflação é tão eficiente para aplanar a curvatura global do Universo, por que também não aplanar a curvatura local devido às flutuações na densidade de energia?

(Nota: sabemos que o Universo não era perfeitamente homogêneo após a inflação dada as anisotropias da CMBR).

## 10.5 A Física da Inflação

Faremos considerações genéricas da física envolvida.

$$\phi(\vec{r}, t)$$

Campo escalar: **inflaton**;  
*unidade*: energia

$$V(\phi)$$

**Energia potencial** associada ao inflaton;  
*unidade*: densidade de energia

## 10.5 A Física da Inflação

Faremos considerações genéricas da física envolvida.

$$\phi(\vec{r}, t)$$

Campo escalar: **inflaton**;  
*unidade*: energia

$$V(\phi)$$

**Energia potencial** associada ao inflaton;  
*unidade*: densidade de energia

Suponhamos que numa região do espaço o campo inflaton é homogêneo, então a densidade de energia do inflaton é:

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{2} \frac{1}{\hbar c^3} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

A pressão do inflaton é:

$$P_\phi = \frac{1}{2} \frac{1}{\hbar c^3} \dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

Se o inflaton muda muito lentamente com t:

$$\dot{\phi}^2 \ll \hbar c^3 V(\phi)$$

Então o inflaton pode agir como uma constante cosmológica:

$$\epsilon_\phi \approx -P_\phi \approx V(\phi)$$



## 10.5 A Física da Inflação

Quais são as circunstâncias no Universo primordial que gerariam as condições para levar à inflação?

$$\dot{\phi}^2 \ll \hbar c^3 V(\phi)$$

densidade de energia do Universo dominada pelo potencial do inflaton

Equação de fluido:

$$\dot{\epsilon}_\phi + 3H(t)(\epsilon_\phi + P_\phi) = 0$$

Substituindo as eqs. anteriores:

Equação similar à da equação de movimento de uma partícula sob a ação de uma força conservativa, com termo de fricção.

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} = -\hbar c^3 \frac{dV}{d\phi}$$

“**fricção de Hubble**”:  
reduz a transição do inflaton para um valor que minimiza  $V$ .

similar a uma “**força**”

Velocidade terminal do inflaton:

$$\ddot{\phi} = 0$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\hbar c^3}{3H} \frac{dV}{d\phi}$$

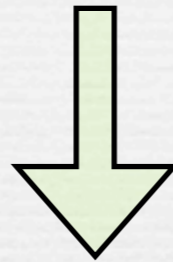
## 10.5 A Física da Inflação

$$\dot{\phi} = -\frac{\hbar c^3}{3H} \frac{dV}{d\phi}$$

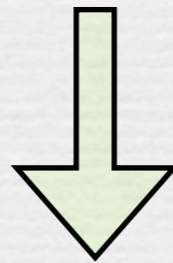
velocidade terminal do inflaton

$$\dot{\phi}^2 \ll \hbar c^3 V(\phi)$$

densidade de energia do Universo  
dominada pelo potencial do inflaton



$$\left(\frac{dV}{d\phi}\right)^2 \ll \frac{9H^2 V}{\hbar c^3}$$



$$H = \left(\frac{8\pi G \epsilon_\phi}{3c^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{8\pi G V}{3c^2}\right)^{1/2}$$

$$\left(\frac{dV}{d\phi}\right)^2 \ll \frac{24\pi G V^2}{\hbar c^5}$$

**ou**

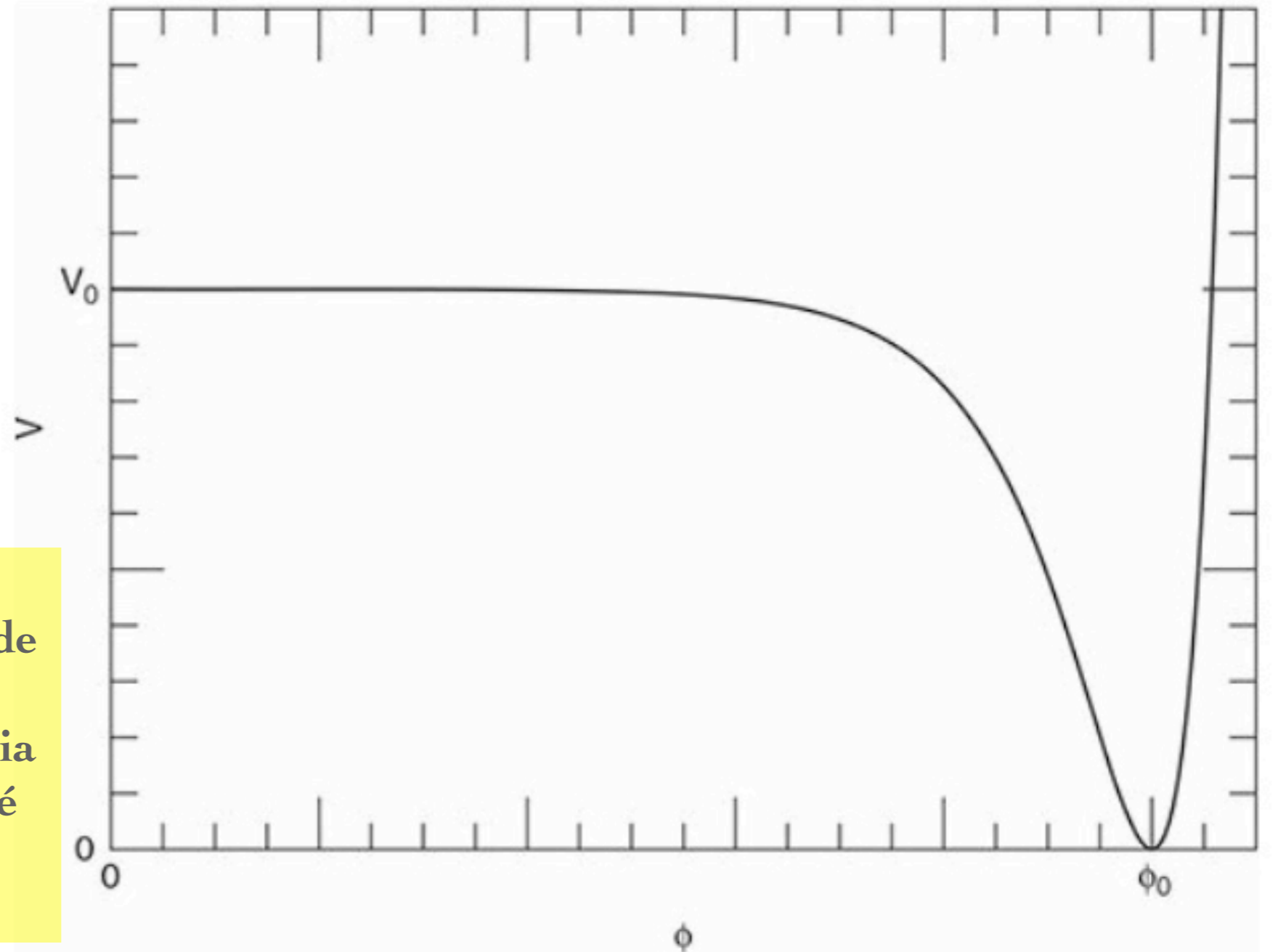
$$\left(\frac{E_P}{V} \frac{dV}{d\phi}\right)^2 \ll 1$$

$$E_P = \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2}$$

## 10.5 A Física da Inflação

$$\left( \frac{E_P}{V} \frac{dV}{d\phi} \right)^2 \ll 1$$

Se a taxa de mudança de  $V$  é muito pequena e a amplitude de  $V$  é suficientemente alta para dominar a densidade de energia do Universo, então o inflaton é capaz de gerar expansão exponencial.

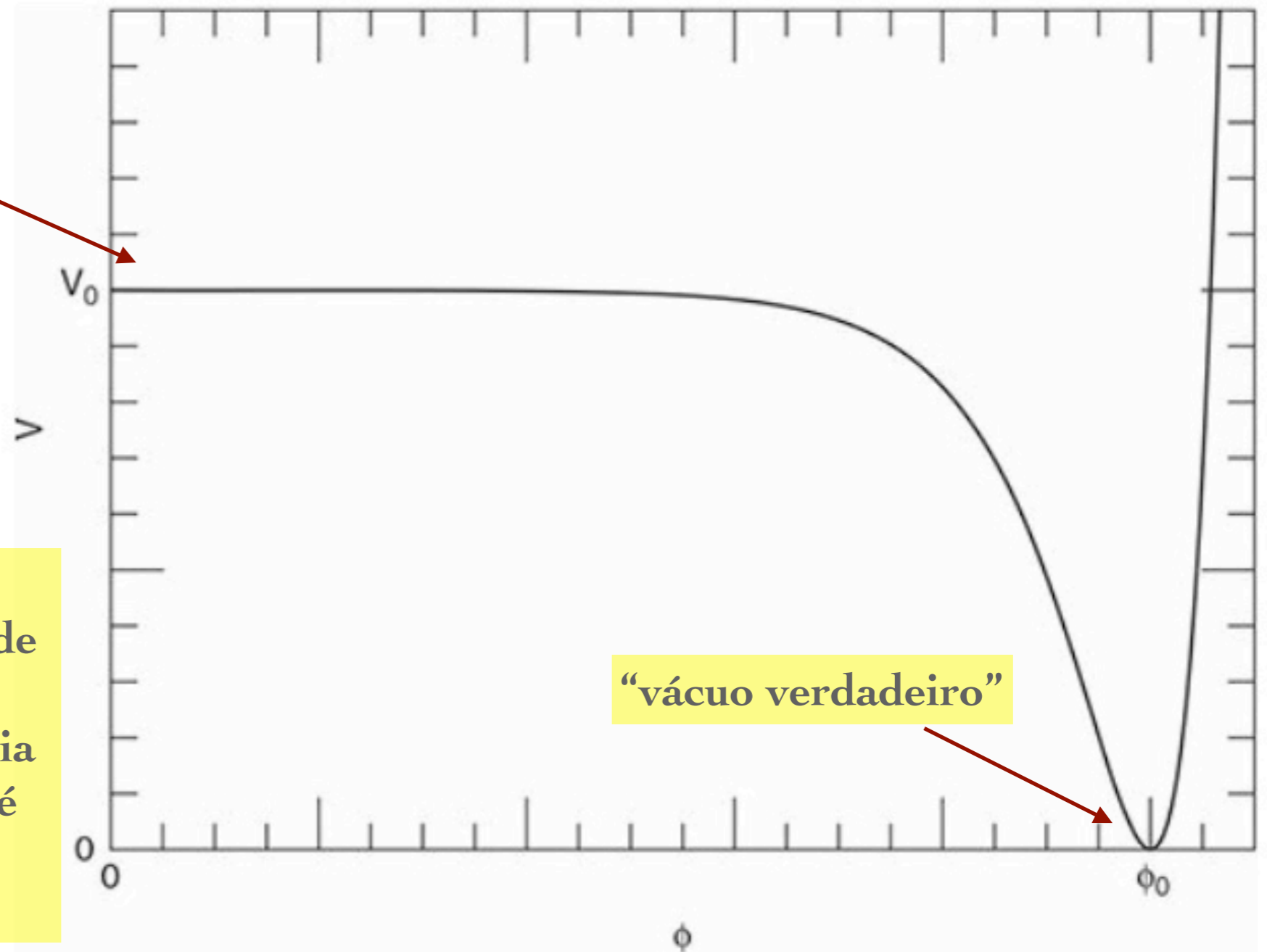


## 10.5 A Física da Inflação

$$\left( \frac{E_P}{V} \frac{dV}{d\phi} \right)^2 \ll 1$$

estado de “vácuo falso metaestável”

Se a taxa de mudança de  $V$  é muito pequena e a amplitude de  $V$  é suficientemente alta para dominar a densidade de energia do Universo, então o inflaton é capaz de gerar expansão exponencial.

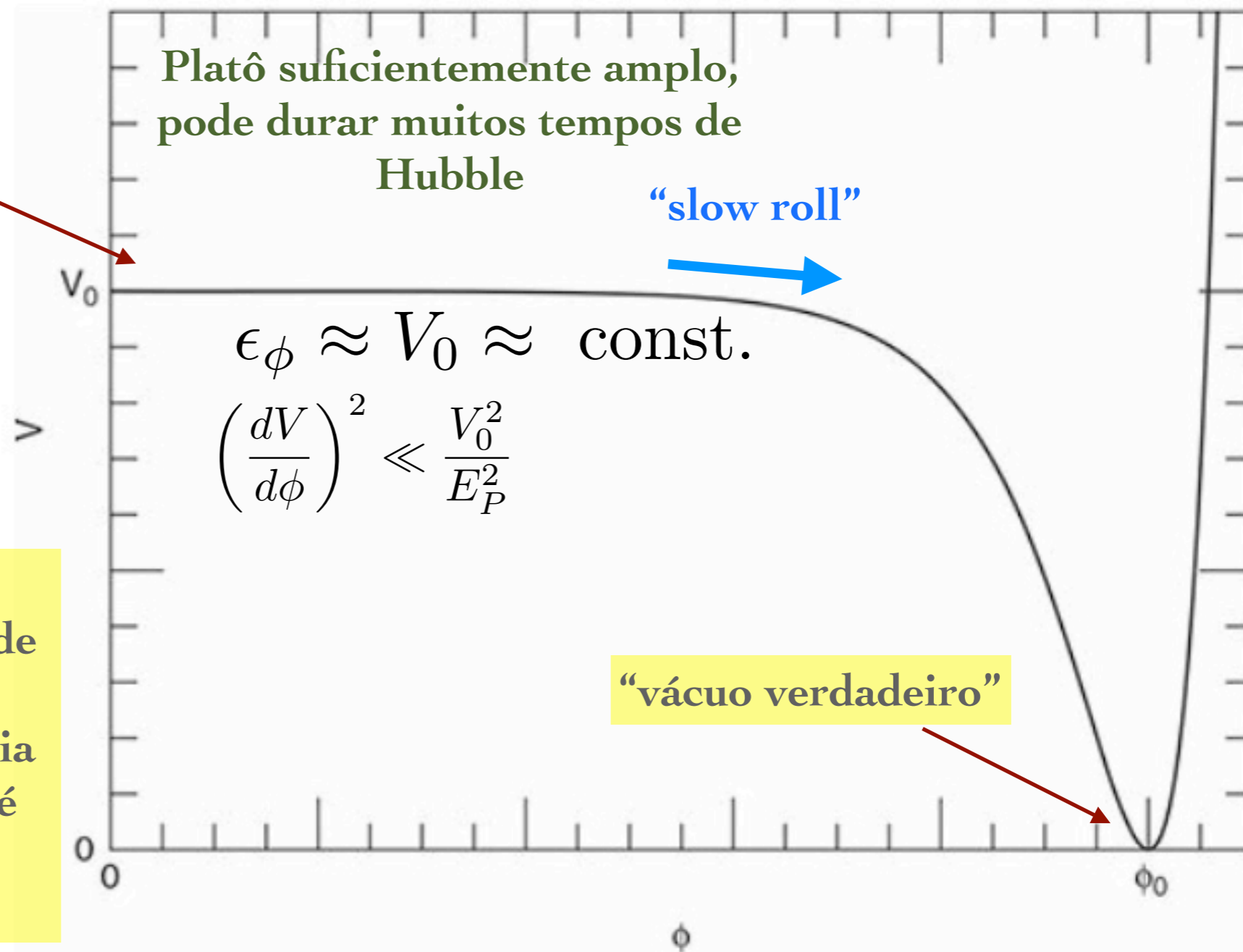


## 10.5 A Física da Inflação

$$\left( \frac{E_P}{V} \frac{dV}{d\phi} \right)^2 \ll 1$$

estado de “vácuo falso metaestável”

Se a taxa de mudança de  $V$  é muito pequena e a amplitude de  $V$  é suficientemente alta para dominar a densidade de energia do Universo, então o inflaton é capaz de gerar expansão exponencial.



Condições gerais para inflação:

$$\phi_0$$

**grande**

**platô largo**

$$V_0$$

**grande**

**platô alto**

$$\frac{dV}{d\phi}$$

**pequeno**

**platô de inclinação pequena**

## 10.5 A Física da Inflação

Qual a temperatura do Universo no início da inflação?  $\epsilon_\phi \approx V_0 \approx \alpha T^4$

$$T_i \approx \left( \frac{V_0}{\alpha} \right)^{1/4} \approx 2 \times 10^{28} \text{ K} \left( \frac{V_0}{10^{105} \text{ TeV m}^{-3}} \right)^{1/4}$$

or

$$\alpha = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3} = 7.566 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}.$$

$$kT_i \approx (\hbar^3 c^3 V_0)^{1/4} \approx 2 \times 10^{12} \text{ TeV} \left( \frac{V_0}{10^{105} \text{ TeV m}^{-3}} \right)^{1/4}.$$

This corresponds to a time

$$t_i \approx \left( \frac{c^2}{GV_0} \right)^{1/2} \approx 3 \times 10^{-36} \text{ s} \left( \frac{V_0}{10^{105} \text{ TeV m}^{-3}} \right)^{-1/2}.$$

**Na medida em que o inflaton “rola” lentamente na direção do estado de vácuo verdadeiro, produz uma expansão exponencial com o parâmetro de Hubble dado por:**

$$H_i \approx \left( \frac{8\pi G V_0}{3c^2} \right)^{1/2} \approx t_i^{-1}$$

**Expansão terminará quando:  $V(\phi) = V(\phi_0)$**

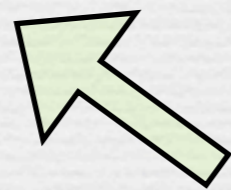
**A duração da expansão depende da forma da curva do potencial do inflaton.**



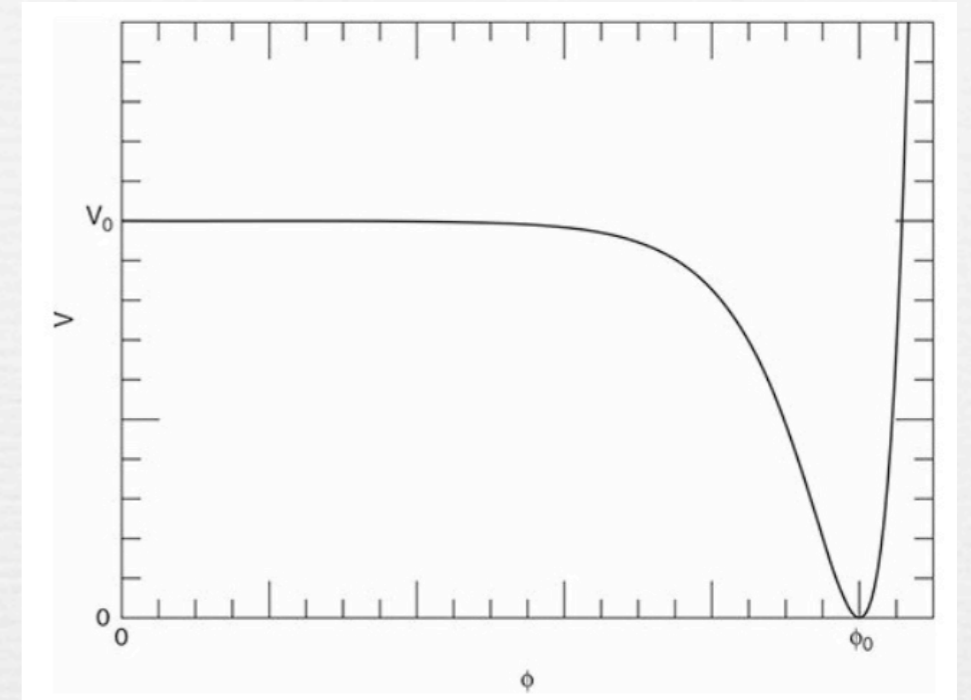
## 10.5 A Física da Inflação

Número de “e-foldings” da inflação  
(para o potencial  $V$  da figura):

$$N \sim H_i \frac{\phi_0}{\phi} \sim \left( \frac{E_P}{V_0} \frac{dV}{d\phi} \right)^{-1} \left( \frac{\phi_0}{E_P} \right)$$



Maior número de  
“e-foldings”

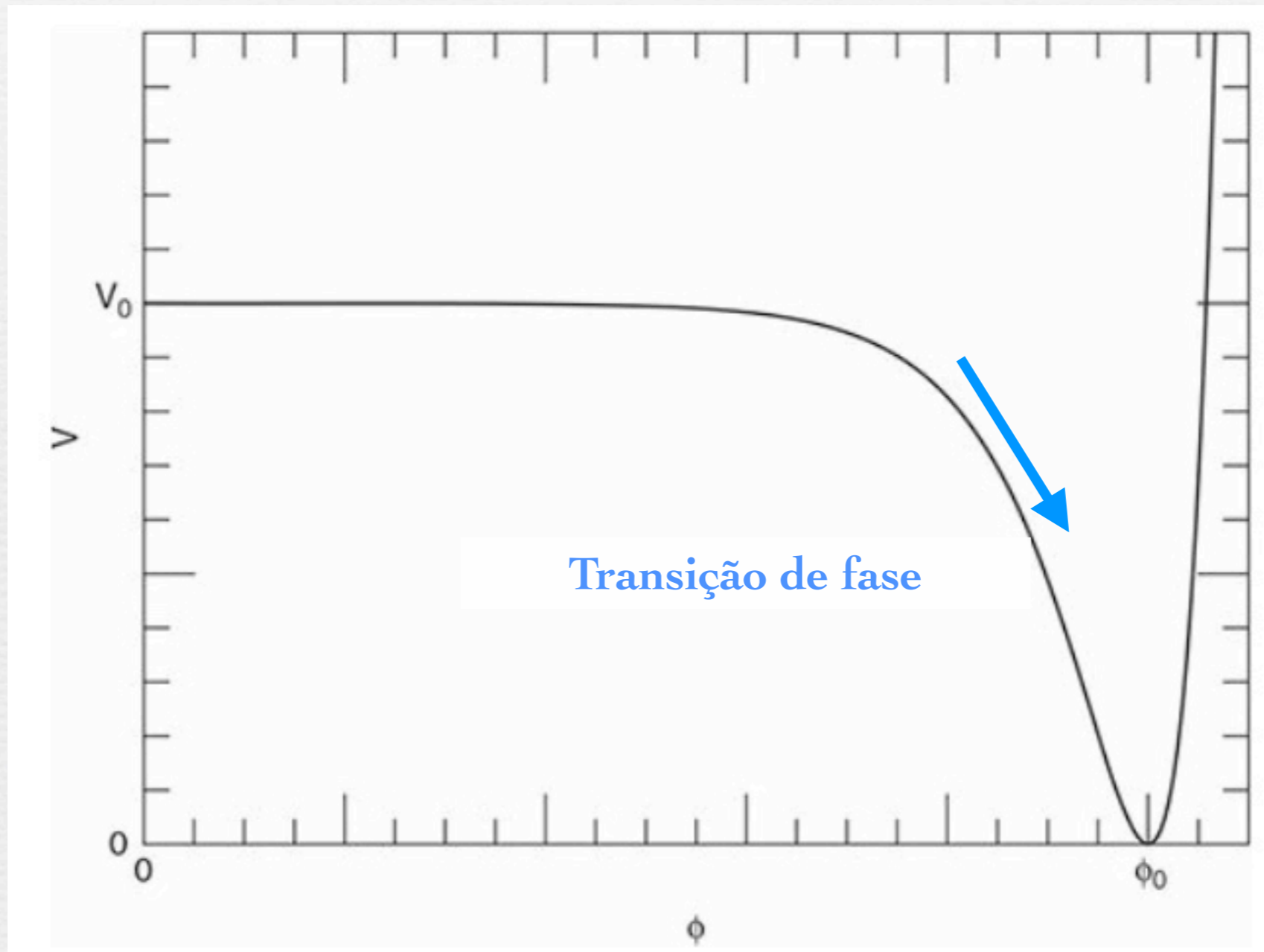


$\phi_0$  grande

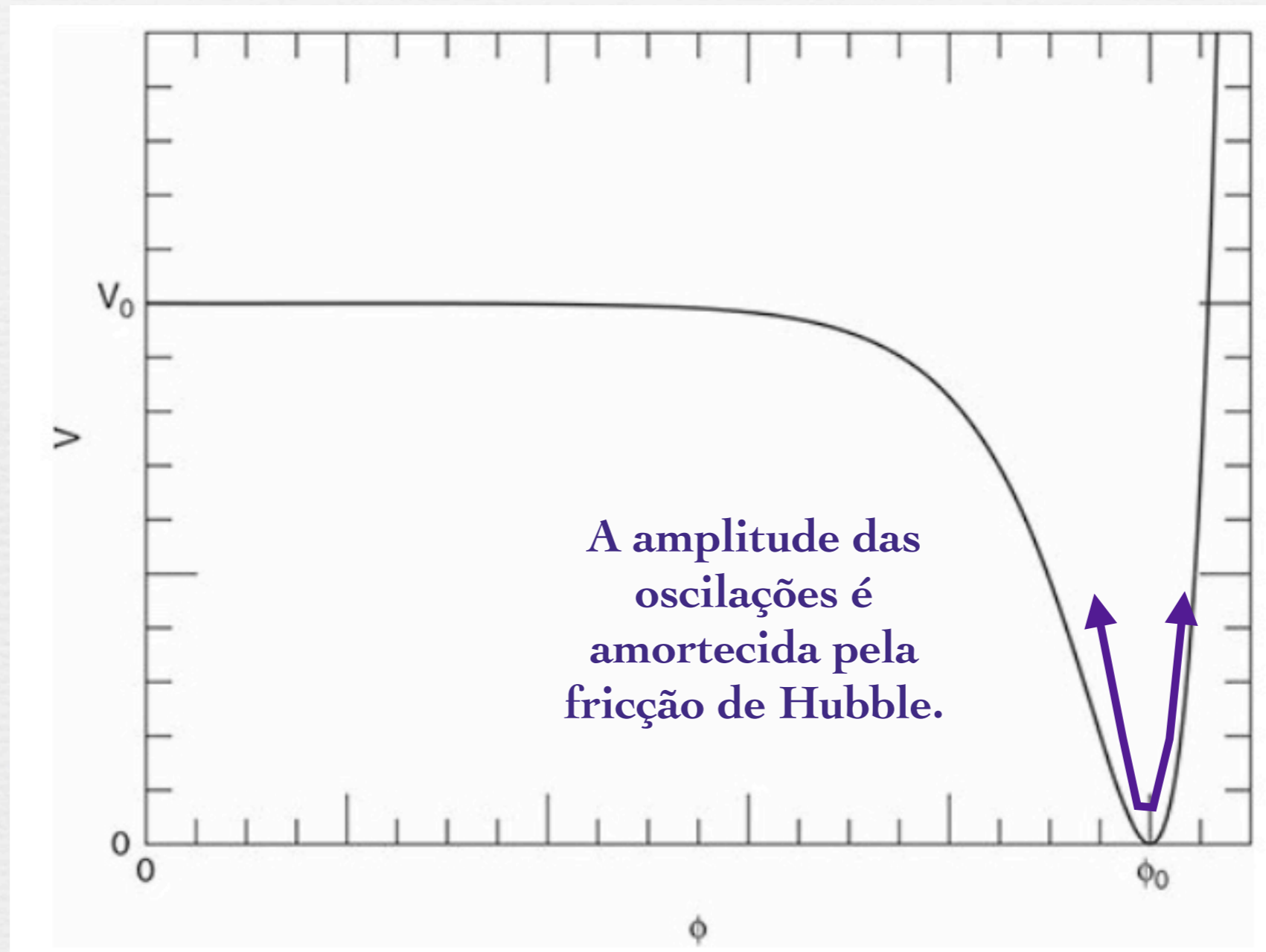
$V_0$  grande

$\frac{dV}{d\phi}$  pequeno

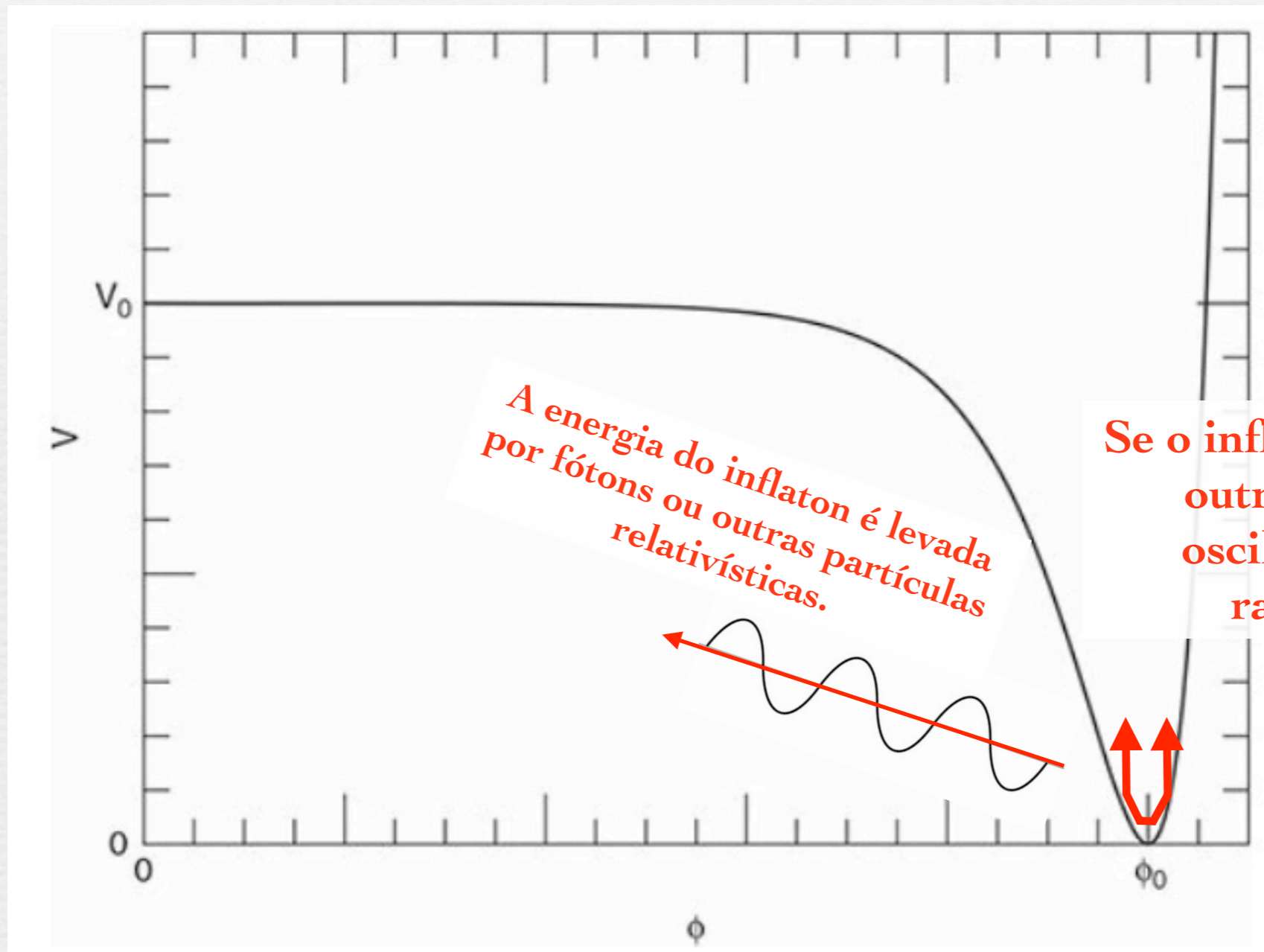
O que ocorre após o inflaton “rolar” e atingir o vácuo verdadeiro?



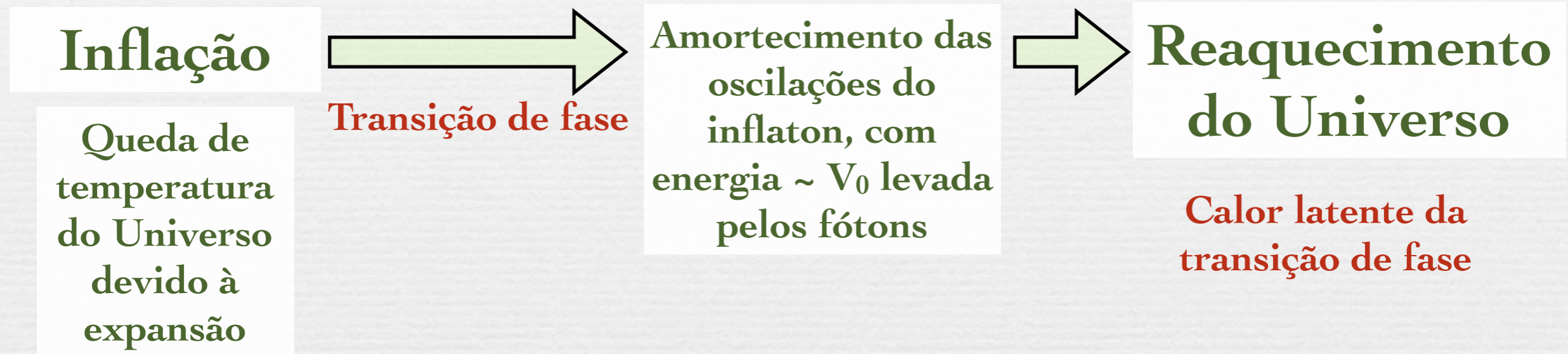
# O que ocorre após o inflaton “rolar” e atingir o vácuo verdadeiro?



# O que ocorre após o inflaton “rolar” e atingir o vácuo verdadeiro?



# O que ocorre após o inflaton “rolar” e atingir o vácuo verdadeiro?

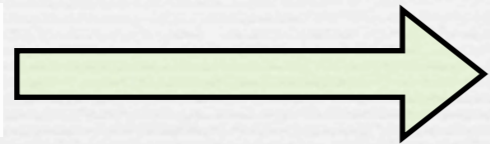


# O que ocorre após o inflaton “rolar” e atingir o vácuo verdadeiro?

$$T(t_i) \sim T_{\text{GUT}} \sim 10^{28} \text{ K} \mapsto T(t_f) \sim e^{-65} T_{\text{GUT}} \sim 0.6 \text{ K}$$

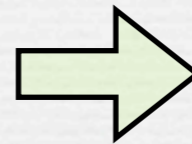
**Inflação**

Queda de temperatura do Universo devido à expansão



**Transição de fase**

Amortecimento das oscilações do inflaton, com energia  $\sim V_0$  levada pelos fótons



**Reaquecimento do Universo**

**Calor latente da transição de fase; temperatura dos fótons retoma o valor pré-inflacionário:  $T(t_i)$**

$$\frac{T(t_f)}{T(t_i)} = e^{-N}$$

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^N$$

**Inflação explica vários problemas, porém restam também outras questões.**

Por ex., expansão exponencial também aplanava a curvatura local, resultante de flutuações na densidade de energia.

*Antes da inflação:*

$$\frac{\delta\epsilon}{\bar{\epsilon}} \sim 1$$

*Após a inflação:*

$$\frac{\delta\epsilon}{\bar{\epsilon}} \sim e^{-65} \sim 10^{-28}$$

**Mesmo considerando o crescimento em amplitude das flutuações antes de  $t_{LS}$ , o CMBR seria muito mais suave do que o observado...**

### Problemas:

- O que é o campo de inflaton? (Seria o campo de Higgs?)
- Relação com a energia escura?
- “Fine-tuning” das condições iniciais (potencial  $V$ )?
- Há vários modelos de inflação, como discriminá-los? Eg., “caótico” (Linde), “eterno” (Steinhardt, Vilenkin; multiverso); “no boundary” (Hartle & Hawking), “híbrido”, etc...
- Há vários modelos “alternativos” (não totalmente), eg., advindos de cosmologia quântica (“bouncing”, “cíclicos”, etc)... como discriminá-los?



## 10.5 A Física da Inflação

- Sugestão de referências adicionais:

Synergistic tests of inflation

<https://arxiv.org/pdf/1612.05138.pdf>

Initial Conditions for Inflation - A Short Review

<https://arxiv.org/pdf/1601.01918.pdf>

Inflation after Planck and BICEP2

<https://arxiv.org/pdf/1506.07433.pdf>

AN INTRODUCTION TO COSMOLOGICAL INFLATION

<https://arxiv.org/pdf/astro-ph/9901124.pdf>

# Fundamentos de Cosmologia

*Aula 10*

**Concluída**

AST-413-4 - INPE - 2020-3

Prof. Dr. Carlos Alexandre Wuensche

Prof. Dra. Christine Córdula Dantas