

PROCESSOS RADIATIVOS

Emissão térmica, Bremsstrahlung, sincrotron e espalhamento Compton

1 - Introdução

Este texto foi escrito com o propósito de apresentar uma visão integrada dos processos radiativos sob o ponto de vista de mecanismos de emissão de radiação no contínuo. Os princípios físicos serão apresentados no começo de cada seção, sendo seguidos da formalismo matemático correspondente e das discussão dos casos particulares e aproximações utilizadas. Finalmente, cada seção terá concluída com a discussão de alguns exemplos astrofísicos. As referências principais para a parte formal são os livros “Radiative Processes in Astrophysics” (Ribicky & Lightman), “Classical Electrodynamics” (J.D. Jackson) e “High Energy Astrophysics, Vol. 1: Particles, Photons, and their Detection,” (M. Longair). Por uma questão de conveniência, utilizaremos o sistema CGS de unidades, exceto quando explicitamente mencionado.

2 - Mecanismos de emissão de radiação no contínuo

Fontes astrofísicas emitem radiação em praticamente todas as faixas do espectro eletromagnético. Uma classificação inicial espacial dessas fontes permite encaixá-las em duas categorias: fontes Galácticas (situadas ao longo e próximas do plano da Galáxia) e fontes extragalácticas, distribuídas de forma mais ou menos uniforme na esfera celeste. Num primeiro momento, não será considerado que essas fontes se distribuem num volume, mas sim sobre a superfície da esfera.

Com base na solução da equação de transferência radiativa discutida ao longo do curso (eq. 1.29 do “Radiative Processes in Astrophysics”, doravante RPA) é possível encontrar uma outra forma de classificação, baseada nas propriedades espectrais dessas fontes. Essa solução possui a forma geral:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (2.1)$$

em que:

$I \rightarrow$ Intensidade específica

$S \rightarrow$ função fonte

$\tau \rightarrow$ profundidade óptica (τ' refere-se à absorção devido ao caminho percorrido pela radiação após a emissão da fonte S)

$\nu \rightarrow$ frequência da radiação envolvida no processo de transferência.

Todos os termos da equação acima são dependentes da frequência, uma vez que a intensidade específica e a seção de choque de absorção (que é um dos termos que definem a profundidade óptica) são função de ν .

Diversos casos podem ser discutidos a partir da suposição que a função fonte é constante. Nesse caso:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (2.2)$$

$$= S_\nu + (I_\nu(0) - S_\nu)e^{-\tau_\nu} \quad (2.3)$$

E, com a ausência de uma fonte externa (atrás da região de interesse), tem-se:

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (2.4)$$

Com base nas propriedades espectrais das fontes, é possível separá-las em fontes que irradiam por processos **térmicos** e outras que possuem os mecanismos de emissão **não-térmicas**. Existem diversos processos de emissão não-térmica, mas observa-se na prática que o mecanismo dominante é a **emissão sincrotron**, ou **magnetoBremsstrahlung**.

As duas classificações mencionadas anteriormente são, em princípio, completamente independentes. Porém, nota-se que fontes extragalácticas são emissores via processos predominantemente não térmicos. Isso é resultado do fato que a radiação emitida por processos não térmicos é muito mais intensa do que a emitida por processos térmicos. Nota-se também que, com exceção de transições atômicas e moleculares ligadas e a emissão térmica de corpos sólidos, que ocorrem em casos menos energéticos, emissões ocorrem com frequência muito maior devido à interação de elétrons livres. Isso é particularmente verdade no caso de emissão em rádio. Como a interação de elétrons livres se dá através da troca de energia em quantidades arbitrárias, o caso a ser tratado é o de um espectro contínuo.

Elétrons livres somente emitem radiação quando acelerados e essa aceleração se dá via força de Lorentz, ou seja, somente na presença de campos eletromagnéticos. Conseqüentemente, o estudo dos processos radiativos deve começar pelo estudo do mecanismo de aceleração dos elétrons livres via campos eletromagnéticos. A força de Lorentz é dada pela expressão:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) \quad (2.5)$$

A análise da aceleração produzida pelo primeiro termo descreve o processo de emissão Bremsstrahlung ou livre-livre. O movimento acelerado de cargas na presença de campos magnéticos causa a emissão conhecida como sincrotron, descrita pela análise do segundo termo da força de Lorentz.

3 - A emissão de corpo negro em objetos astronômicos

Os primeiros objetos tratados como corpos negros diretamente foram os corpos do Sistema Solar, tais como planetas e outros corpos sólidos. Nesses casos, a profundidade óptica é praticamente infinita e a equação de transferência radiativa nos dá $I_v = B_v$.

Outras áreas da astronomia em que a emissão de corpo negro é bastante utilizada é no estudo de poeira em nuvens moleculares. A relação entre as temperaturas da poeira e da Radiação Cósmica de Fundo em Microondas (RCF) pode ser desprezada porque, em geral, $T_p \gg T_{RCF}$. O passo mais importante no estudo da emissão de poeira é a conexão entre τ_p e a densidade de H da nuvem molecular. A maior dificuldade encontra-se na determinação da emissividade em função da forma dos grãos de poeira e da área emissora, que não podem ser diretamente determinados. Medidas recentes sugerem que a maior parte da poeira existente no Universo é do tipo poeira fria, com temperaturas entre 10 e 30 K. Elas são, provavelmente, o melhor traçador de gás interestelar na nossa galáxia. Nessa faixa de temperaturas, as massas das nuvens de poeira podem ser diretamente estimadas usando dados na faixa submilimétrica ou infravermelho do espectro eletromagnético.

A radiação térmica de poeira apresenta um certo grau de polarização devido ao alinhamento por algum processo físico (possivelmente campos magnéticos galácticos). Medidas do grau de polarização permitem estimar a direção do campo magnético galáctico ao longo da linha de visada.

O corpo negro mais estudado (e o melhor exemplo de emissão de corpo negro na natureza) é a RCFM, que pode ser quase perfeitamente representada por um corpo negro a uma temperatura de 2,726 K. Ela é originária da situação de equilíbrio termodinâmico no Universo jovem, quando fótons, elétrons e bárions mantinham-se em equilíbrio devido à forte interação fóton-elétron via espalhamento Compton. Após a passagem do Universo do estado ionizado para neutro, quando os elétrons foram capturados pelos prótons e núcleos de He, os fótons passaram a se propagar livremente até nós, alterando somente sua energia, devido à expansão do Universo. A temperatura atual (T_0) é proporcional à temperatura no Universo primordial, conforme a expressão $T(z) = T_0(1+z)$ em que $T(z)$ é a temperatura média do Universo num redshift z (o que corresponde à uma idade no passado).

4 - A emissão Bremsstrahlung

O termo Bremsstrahlung, também conhecida como **emissão livre-livre (free-free emission)**, vem do alemão e significa “radiação de freiamento”, emitida por cargas em movimento sujeita à ação de um campo elétrico. Essa emissão ocorre devido à desaceleração causada pelo campo Coulombiano de uma carga sobre outra, podendo ocorrer entre elétron e íon e elétron e pósitron. Os pares elétron-elétron e íon-íon não produzem Bremsstrahlung porque seu momento de dipolo é ZERO. O momento de dipolo ($\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}$) é proporcional ao centro de massa ($\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}$), de modo que pode ser tratado como uma constante de movimento. Elétrons são os emissores primários ($a \sim 1/m$) e consideramos que ele se move no campo Coulombiano do íon. Devido às características da geometria da trajetória, o tratamento da emissão pode ser entendido como um **movimento sob força central**.

O tratamento completo da emissão Bremsstrahlung envolve efeitos quânticos, em função das seções de choque entre as partículas (e do correspondente cálculo do fator de Gaunt). A força magnética pode ser tratada como uma troca de fótons virtuais em que alguns escapam e podem ser observados. O tratamento clássico justifica-se em muitos casos, quando a velocidade é baixa e as colisões são relativamente próximas, produzindo muitos fótons. Entretanto, a dependência funcional do efeito com os parâmetros físicos é a mesma que no caso quântico. Por outro lado, o tratamento quântico é essencial para derivar a distribuição de fótons em altas energias.

O contexto astrofísico da emissão Bremsstrahlung está ligada diretamente a colisões Coulombianas de elétrons em plasmas quentes. Os elétrons são acelerados durante as colisões com os íons no plasma e emitem radiação, que pode escapar do plasma caso a profundidade óptica seja baixa.

4.1 - Formulação do problema

O tratamento inicial para os casos clássico e quântico é idêntico, de modo que podemos começar tratando ambos simultaneamente. O Bremsstrahlung clássico é derivado a partir da Força de Lorentz (Coulombiana) e os termos de correção (fatores de Gaunt) vão sendo adicionados conforme necessário. Supomos que a colisão ocorre durante um tempo τ , durante o qual a velocidade da partícula varia de \mathbf{v} para \mathbf{v}' . A aceleração da partícula pode, então, ser determinada. O espectro de radiação emitido num intervalo finito de frequências vai depender dos detalhes da colisão mas, para baixas frequências (energias não relativísticas), sua forma é definida pelas velocidades inicial e final, sendo calculado no espaço de Fourier. O resultado para toda a radiação emitida é feito integrando a potência emitida para um único elétron interagindo no campo Coulombiano sobre os parâmetros de impacto (colisão entre b_{\max} e b_{\min}).

Uma análise semiquantitativa do caso clássico deve fornecer seguir os passos abaixo: inicialmente determina-se a **energia radiativa emitida por um único elétron** em uma colisão próxima com um íon, relacionando a **velocidade, o parâmetro de impacto e a frequência da radiação emitida**. A seguir, generalizamos o resultado, calculando a **potência emitida, no intervalo de frequências entre \mathbf{v} e $\mathbf{v}+d\mathbf{v}$, por todos os elétrons** (sujeitos a uma distribuição de velocidades que obedece a

estatística de Maxwell-Boltzmann) que colidem com um único íon. O próximo passo é calcular, para a frequência ν , a **potência emitida por todas as colisões em um dado volume**. Essa quantidade define a **emissividade $j_\nu(\nu, T)$** do plasma em função da temperatura do plasma em uma dada frequência ν . A **emissividade total é a integral de $j_\nu(\nu, T)$ em todo o espaço de frequências**, $j(\nu, T)$, que permite o cálculo da **intensidade específica $I(\nu, T)$** em termos da espessura do plasma ao longo da linha de visada. A Fig. 4.1 apresenta um esquema da produção de emissão Bremsstrahlung por uma nuvem de plasma ionizado.

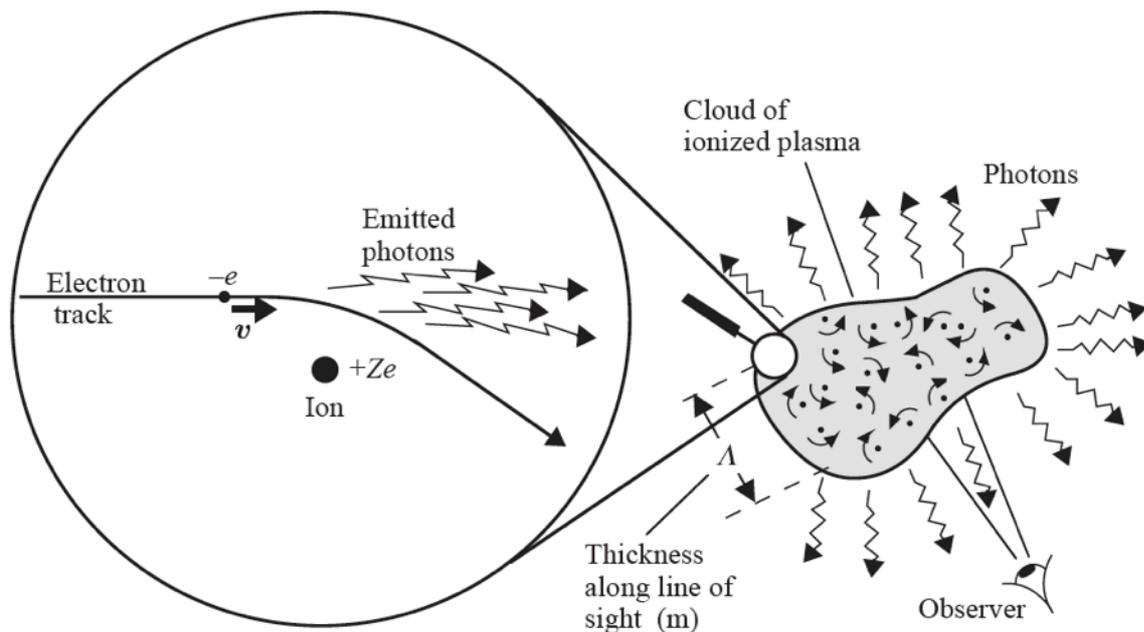


Figura 4.1 - Nuvem de plasma ionizado, produzindo radiação Bremsstrahlung devido à interação entre elétrons e íons. A espessura da nuvem ao longo da linha de visada é dada por Λ (Fonte: Bradt (2003)).

4.2 - Emissão de um único elétron

Um elétron sujeito à ação Coulombiana de um íon, em baixas energias (regime não relativístico), sofre uma pequena deflexão, causando uma mudança de velocidades e consequente aceleração. A formulação básica parte da força de Lorentz para um campo elétrico (Lei de Coulomb) e podemos escrever:

$$\vec{a}_e = e\vec{E}/m_e \tag{4.1}$$

em que a é a aceleração do elétron, e é a carga, E é o campo elétrico do íon e m é a massa do elétron. Como o campo elétrico é dado por Ze/r^2 , podemos definir a distância mínima de aproximação em termos do parâmetro de colisão, tal que existe uma distância mínima (dada por $r^2 = b^2 + (v_e t)^2$) em que v_e é a velocidade do elétron e b é o parâmetro de colisão, a partir da qual o elétron passar a sentir o campo produzido pelo íon. Da mesma forma, podemos definir um tempo típico de colisão, τ , que é da ordem de b/v_e , durante o qual a interação campo-partícula é efetiva e esta emite radiação. A geometria da colisão que produz a emissão Bremsstrahlung pode ser vista na Fig. 4.2.

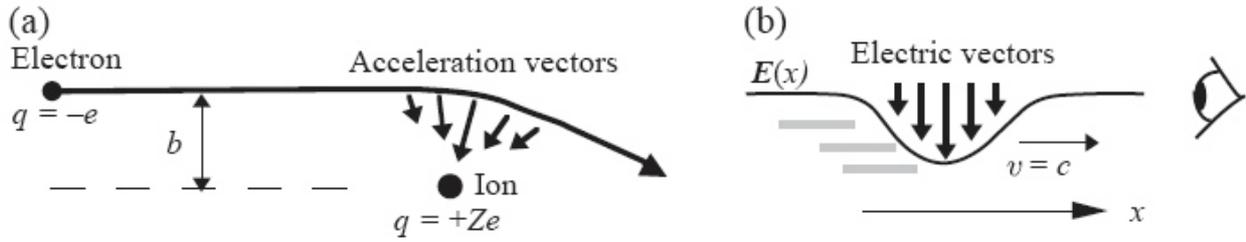


Figura 4.2 - Geometria da colisão Bremsstrahlung, no referencial do elétron (a). O perfil do campo elétrico $E(x)$ é mostrado, nos instantes da aproximação, como uma linha sólida (b). Note a correspondência entre a variação da aceleração em (a) e do campo elétrico em (b). (Fonte: Bradt (2003)).

A aceleração do elétron, em seu sistema de referência, pode ser decomposta nas componentes paralela e perpendicular, dadas pelas expressões:

$$a_{||} = -\frac{eE_x}{m_e} = \frac{\gamma Ze^2 vt}{m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} \quad (4.2)$$

$$a_{\perp} = -\frac{eE_x}{m_e} = \frac{\gamma Ze^2 b}{m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} \quad (4.3)$$

Nesse caso já está incluída a correção relativística para o caso de v ser uma fração significativa de c . Os termos b e γvt vem da projeção da aceleração nas direções paralelas (x) e perpendicular (z) ao movimento do elétron. O diagrama de movimento em termos dos eixos e do ângulo θ entre a direção do movimento e da radiação emitida encontra-se na Fig. 4.4.

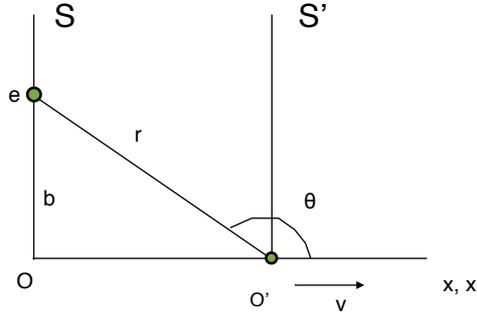


Figura 4.3 - Geometria da colisão Bremsstrahlung, em termos das componentes e dos referenciais do elétron (S') e do observador (S).

Note que, para $vt \gg b$, o efeito do campo sobre o elétron desaparece e a emissão Bremsstrahlung também! Seguindo o roteiro descrito na sec. 4.1, calculamos a transformada de Fourier das acelerações, no intervalo de $-\infty$ a $+\infty$. Essa integral poderia ser alterada, com o limite indo de 0 a $+\infty$ e sendo multiplicada por 2, mas pode-se entender o tempo negativo como o intervalo anterior à colisão, de modo que não há violação do sentido físico do processo.

$$a_{||}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma Ze^2 vt}{m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} e^{i\omega t} dt \quad (4.4)$$

$$a_{\perp}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma Ze^2 b}{m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} e^{i\omega t} dt \quad (4.5)$$

Fazendo uma troca de variáveis $x = \gamma vt/b$, $dx = \gamma v dt/b$ e $dt = b dx/\gamma v$, de modo que as integrais ficam com a forma e a solução abaixo:

$$a_{||}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{Ze^2}{m_e \gamma b v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} e^{\frac{i\omega v}{\gamma} x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{Ze^2}{m_e \gamma b v} I_1(y) \quad (4.6)$$

$$a_{\perp}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{Ze^2}{m_e b v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} e^{\frac{i\omega v}{\gamma} x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{Ze^2}{m_e b v} I_2(y) \quad (4.7)$$

$I_1(y) = 2iyK_0(y)$ e $I_2(y) = 2yK_1(y)$ são combinações das funções modificadas de Bessel K_0 e K_1 e o argumento $y = \omega b/\gamma v$. A intensidade da radiação emitida durante a interação de um único elétron com um íon, com um parâmetro de impacto b , é dada pela combinação das intensidades em função das acelerações paralela e perpendicular.

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{2e^2}{3c^3} [|a_{||}(\omega)|^2 + |a_{\perp}(\omega)|^2] \\ &= \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{Ze^2}{m_e b v}\right)^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} I_1^2(y) + I_2^2(y)\right] \\ &= \frac{Z^2 e^6}{6\pi^2 c^3 m_e^2 v^2 b^2} \left[\frac{1}{\gamma^2} I_1^2(\omega b/\gamma v) + I_2^2(\omega b/\gamma v)\right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

A primeira linha da expressão acima vem da eq. 4.26b do Ribicky & Lightman e o restante vem da álgebra da substituição. Sabemos que $y = \omega b/\gamma v$ é um parâmetro adimensional, com o numerador e denominador tendo unidades de velocidade. É interessante também notar qual é a componente dominante no espectro de intensidade, plotando separadamente os termos correspondentes a cada aceleração. A componente paralela Podemos definir os limites de validade para os argumentos das funções de Bessel (ver, p. ex., Abramowitz e Stegun) em termos do tempo de interação do elétron com o núcleo tal que:

- $y \ll 1 \rightarrow K_0(y) = -\ln(y); K_1(y) = 1/y$
- $y \gg 1 \rightarrow K_0(y) = K_1(y) = (\pi/2y)^{1/2} \exp(-y)$

Para frequências altas ($y \gg 1$) temos um corte exponencial no espectro e para frequências baixas, e a intensidade é dada pela expressão:

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{3\pi^2 c^3} \frac{\omega}{m_e^2 \gamma b v^3} \left[1 - \frac{1}{\gamma^2}\right] \exp\left(-\frac{2\omega b}{\gamma v}\right) \quad (4.9)$$

O corte exponencial mostra que a potência emitida cai rapidamente para frequências maiores que $\omega \approx \gamma v/b$. No caso de frequências baixas, $y \ll 1$ ($\omega b \ll \gamma v$), teremos:

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{2Z^2 e^6}{3\pi^2 c^3} \frac{\omega^2}{m_e^2 \gamma^2 v^4} \left[\frac{1}{y^2} - \frac{\ln^2(y)}{\gamma^2}\right] \\ &= \frac{2Z^2 e^6}{3\pi^2 c^3} \frac{1}{m_e^2 b^2 v^2} = K(\text{constante}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nesse caso, o segundo termo no colchete desaparece e $I(\omega)$ reduz-se a uma constante (praticamente produzida pela emissão perpendicular à linha de visada, que não varia). Em função desse comportamento assintótico derivado das funções modificadas de Bessel, a aproximação “ótima” para o comportamento da intensidade Bremsstrahlung é um espectro plano para frequências menores que $\omega = \gamma v/b$, e com queda exponencial a partir daí (Fig. 4.4).

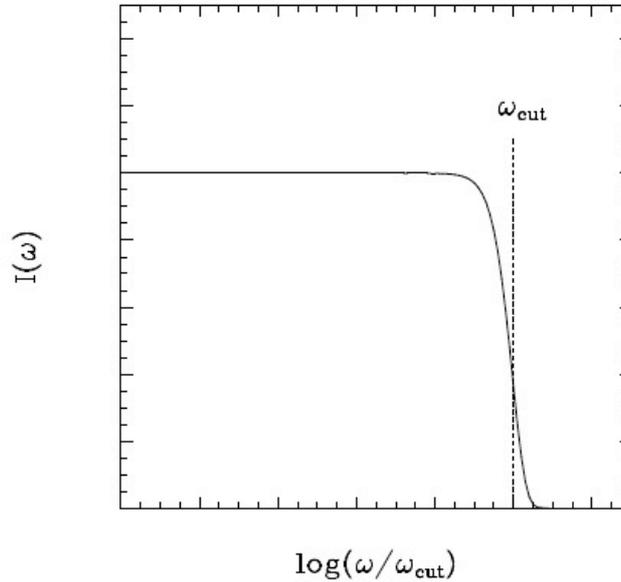


Figura 4.4 - Espectro produzido por emissão Bremsstrahlung. O espectro é plano até a frequência de corte, ω_{cut} , caindo exponencialmente para frequências maiores.

Até agora, a análise foi realizada de maneira geral, não particularizando a emissão para casos não-relativísticos, uma vez que ela foi feita no sistema de referência do elétron. Entretanto, se o elétron move-se relativisticamente, a densidade de núcleos aumenta de um fator γ ($N' = \gamma N$), devido à contração relativística do espaço e o número de encontros por segundo é $N'v$. O espectro de radiação no sistema de referência do elétron é calculado integrando-se $I(\omega)$, para um único elétron, vezes o número de encontros ($N'v$) pelos diversos íons no plasma ($N' = \gamma N$) em torno do parâmetro de impacto, dando:

$$\begin{aligned}
 I(\omega') &= \int_{b'_{min}}^{b'_{max}} 2\pi b' \gamma N v K db' \\
 &= 2\pi \gamma N v \left(\frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{\pi^2 c^3 m_e^2 v^2} \right) \int_{b'_{min}}^{b'_{max}} \frac{b' db'}{b'^2} \\
 &= \frac{4Z^2 e^6 \gamma N}{3\pi c^3 m_e^2 v} \int_{b'_{min}}^{b'_{max}} \frac{db'}{b'} \\
 &= \frac{4}{3\pi} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \frac{\gamma N}{v} \ln\left(\frac{b'_{max}}{b'_{min}}\right)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

sendo que os valores de b_{min} e b_{max} serão discutidos a seguir. A eq. (4.11) explicita a dependência da intensidade emitida com o parâmetro de impacto

4.4 - Bremsstrahlung não relativístico e térmico

Como o primeiro caso dessa seção é, por construção, NÃO-RELATIVÍSTICO, podemos desprezar o fator γ na equação abaixo

$$I(\omega') = \frac{4Z^2 e^6}{3\pi^2} \frac{\gamma N}{c^3 m_e^2 v} \ln\left(\frac{b'_{max}}{b'_{min}}\right) \quad (4.12)$$

e definir b_{max} e b_{min} . Não vamos resolver a eq. 4.12 para valores de b_{max} que caiam na região exponencial; ficaremos no “platô”, já que para $b > b_{max}$ o decaimento é exponencial e rapidamente $I(\omega)$ tende a zero. Assim, $b_{max}=v/\omega$ ($\omega b/v=1$), limitado convenientemente para que $I(\omega)$ não entre no regime exponencial. Para b_{min} , escolhemos o limite clássico em que $b_{min}=Ze^2/mv^2$ (ou $v \leq Z/137 c$, sendo $1/137$ o valor aproximada da constante de estrutura fina). Esse valor é definido no limite para velocidades baixas, em que vale a aproximação de pequenos ângulos ($\text{sen}\theta \sim \theta$, em que θ é o ângulo entre a direção inicial e final do movimento do elétron) e igualamos a máxima variação de energia cinética do elétron ($\sim 2m_e v^2$) à sua energia potencial eletrostática, considerando $r = b_{min}$.

Para velocidades altas ($v \geq (Z/137) c$), restrições quânticas aparecem quando tratamos da interação próxima entre uma partícula de alta energia e um átomo. A máxima variação de velocidade adquirida nesse encontro é da ordem de $2v$ e sua variação de momentum é $\Delta p=2m_e v$. Utilizando o Princípio da Incerteza, a precisão com que se pode determinar a posição relativa desse sistema é dada por $\Delta x = \hbar/2m_e v$, de forma que consideramos $b_{min} = \hbar/2m_e v$. Ambos os casos seriam adequados para tratar, por exemplo, da emissão Bremsstrahlung de regiões quentes no interior de aglomerados de galáxias, cuja temperatura é da ordem de 10^4 K. Essa emissão ocorre na faixa de raios X do espectro eletromagnético, mas ainda apresenta comportamento não relativístico.

É possível escrever a eq. 4.12 da seguinte maneira:

$$I(\omega') = \frac{4Z^2 e^6}{3\pi^2} \frac{N}{m_e^2 v c^3} \ln(\Delta) \quad (4.13)$$

sendo que Δ assume os valores

$\Delta=2m_e v^3/Z e^2 \omega$	para baixas velocidades
$\Delta=2m_e v^2/\hbar \omega$	para altas velocidades

Para calcular a emissão de um gás à temperatura T , ponderamos a distribuição de velocidades dos elétrons de acordo com uma distribuição de Maxwell-Boltzmann. Esse caso é considerado como **Bremsstrahlung térmico**. Supondo que o número de elétrons disponíveis no plasma capazes de interagir com íons e produzir emissão Bremsstrahlung encontram-se num intervalo de velocidades entre v e $v+dv$, podemos escrever a expressão para a densidade numérica de elétrons em função da velocidade como:

$$N_e(v)dv = 4\pi N_e \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_e v^2}{2\kappa T}} dv \quad (4.14)$$

em que $4\pi v^2 dv$ é o elemento de volume no espaço de velocidades. Uma solução correta, somente em termos de ordens de grandeza, pode ser obtida, no limite de baixas frequências, se fizermos $1/2m_e v^2 = 3/2\kappa T$ na expressão (4.14) e substituirmos (4.14) em (4.13):

$$I(\omega') \approx \frac{Z^2 e^6 N N_e}{3\sqrt{3} c^3 m_e^2} \left(\frac{m_e}{\kappa T}\right)^{1/2} g(\omega, T) \quad (4.15)$$

em que $g(\omega, T)$ é o fator de Gaunt. A solução completa, em que as diferentes expressões para o fator de Gaunt são calculadas, aparece da integral abaixo, em que os limites de b_{\max} e b_{\min} são substituídos dentro do logaritmo.

$$\begin{aligned} I(\omega') &= \frac{4Z^2 e^6 N N_e(v)}{3\pi^2 c^3 m_e^2 v} \ln\left(\frac{b'_{\max}}{b'_{\min}}\right) \\ &= \frac{4Z^2 e^6 N}{3\pi^2 c^3 m_e^2} \int_v N_e \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} v e^{(-m_e v^2/2\kappa T)} \ln\left(\frac{b'_{\max}}{b'_{\min}}\right) dv \\ &= \frac{4Z^2 e^6 N N_e}{3\pi^2 c^3 m_e^2} \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} \int_{v_{\min}}^{\infty} v e^{(-m_e v^2/2\kappa T)} \ln\left(\frac{2m_e v^3}{Z e^2 \omega}\right) dv \quad \text{para baixas velocidades} \\ &= \frac{4Z^2 e^6 N N_e}{3\pi^2 c^3 m_e^2} \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} \int_{v_{\min}}^{\infty} v e^{(-m_e v^2/2\kappa T)} \ln\left(\frac{2m_e v^2}{\hbar\omega}\right) dv \quad \text{para altas velocidades} \end{aligned}$$

O fator de Gaunt substitui, adequadamente, o termo $\ln(b_{\max}/b_{\min})$ integrado sobre as velocidades, possuindo expressões diferentes em função da faixa de energia em que a emissão ocorre. Por exemplo, em altas frequências ($h\nu \gg kT$), o corte no espectro ocorre devido à queda exponencial $e^{-h\nu/kT}$, refletindo a pequena população de elétrons na cauda Maxwelliana. A integração de $I(\omega')$ em v (fazendo $d\omega = 2\pi dv$) nos dá a emissividade Bremsstrahlung do plasma ($dW/dV dt dv$) em unidades ($\text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-3}\cdot\text{Hz}^{-1}$).

$$\begin{aligned} \epsilon_\nu &= \frac{32\pi e^6}{3m_e c^3} \left(\frac{2\pi}{3\kappa T}\right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 N N_e g(\nu, T) e^{-h\nu/\kappa T} \\ &= 6,8 \times 10^{-38} T^{-1/2} Z^2 N N_e g(\nu, T) e^{-h\nu/\kappa T} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Discutiremos agora, rapidamente, o fator de Gaunt. Para frequências muito baixas ($h\nu \ll kT$), ele possui uma dependência logarítmica com a frequência. Formas típicas dessa dependência podem ser vistas nas Eqs. 4.17:

$$\begin{aligned} g_{\text{RaiosX}}(\nu, T) &= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[\ln\left(\frac{32\kappa^3 T^3}{\pi m_e e^4 \nu^2 Z^2}\right) - \gamma_{\text{Euler}}^{1/2} \right] \\ g_{\text{Radio}}(\nu, T) &= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[\ln\left(\frac{\kappa T}{h\nu}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

em que γ é a constante de Euler. A dependência logarítmica para ambos os casos pode ser derivada diretamente da Eq. 4.14. Para frequências altas ($h\nu \gg kT$), $g(\nu, T) \sim (kT/h\nu)^{1/2}$, valores estes derivados das aproximações assintóticas feitas para as funções de Bessel nas Eqs. 4.8, 4.9 e 4.10.

Integrando a expressão (4.16) no intervalo de frequências de interesse, obtemos a taxa total de perda de energia do plasma por emissão Bremsstrahlung, dado pela Eq. 4.18.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ff} &= \int_0^{\infty} \epsilon_{\nu} d\nu \\
 &= \frac{32\pi e^6}{3m_e c^3} \left(\frac{2\pi}{3\kappa T}\right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 N N_e \bar{g} \int_0^{\infty} e^{-h\nu/\kappa T} d\nu \\
 &= 1,43 \times 10^{-27} T^{1/2} Z^2 N N_e \bar{g}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Valores aproximados para o fator de Gaunt situam-se entre 1 e 1,5 ($g_{\text{médio}} \sim 1,2$). Os limites de utilização encontram-se separados na Fig. 4.5 e mostram as relações de energia do elétron em relação à temperatura do plasma (ordenada) e do elétron em relação à energia de ionização do átomo de H (abscissa). Esses limites definem dois casos limites de observação da emissão Bremsstrahlung: **espalhamento em pequenos ângulos (parâmetro de colisão grande) e pequenos ângulos (parâmetro de colisão pequeno)**.

Na parte inferior do gráfico ($h\nu/kT < 1$) encontra-se o limite de baixas energias do plasma (região de “Rayleigh Jeans”). A região “clássica”, isto é, de baixas velocidades, correspondem aos dois primeiros setores da parte inferior, sendo que, na região de pequenos ângulos, a razão $(kT/Z^2 R_y)/(h\nu/kT)$ define o comportamento do fator de Gaunt. A região de grandes ângulos apresenta $G = 1$ porque não há necessidade de correção da seção de choque para a interação elétron-íon. Como partimos da suposição que a distribuição de velocidades é Maxwelliana, podemos associar a velocidade média dos elétrons com a temperatura do plasma: $(kT/h\nu) = (m_e v^2/2h\nu)$. Ao passarmos da região de grandes ângulos para pequenos ângulos (inicialmente clássica) o numerador é pequeno, o termo $\ln()$ depende da energia cinética do elétron (pois $kT = m_e v^2/2$) dominando a expressão para G . A partir do momento em que $kT/Z^2 R_y > 1$, ele contribuirá com um valor constante, mas pequeno (já que encontra-se dentro de $\ln()$) e o fator de Gaunt na região de pequenos ângulos e altas energias para o elétron somente dependerá da energia do plasma.

A parte superior da Fig. 4.5 descreve a região em que a energia dos fótons é maior do que a dos elétrons ($h\nu/kT = 2h\nu/m_e v^2$). Nesse caso, levando em conta a nossa suposição inicial de uma distribuição Maxwelliana, teremos muito menos elétrons interagindo com os núcleos, já que somente os elétrons mais energéticos terão energia suficiente para emitir um fóton Bremsstrahlung cuja energia seja maior do que a energia média do campo de radiação. As regiões de cauda (“tail regions”) separam a região em que a radiação passa a ser emitida por elétrons cuja energia cinética está no limite mínimo de emissão ($h\nu \approx 1/2 m_e v^2$) de uma “região proibida”, não mostrada na Fig. 4.5, em que $G = 0$. Essa região proibida existe porque fótons individuais não podem possuir energia cinética maior do que a energia cinética mínima dos elétrons, a menos que eles sejam capturados num estado ligado. Como a captura produz radiação “livre-ligado”, em vez de

Bremsstrahlung, regiões em que $h\nu > 1/2 m_e v^2$ são “proibidas” pois não ocorre emissão sob essas condições. Assim, as emissões em que $h\nu \gg kT$ sempre serão produzidas pelos elétrons da cauda da distribuição Maxwelliana de velocidades. Na região de pequenos ângulos (parâmetro de colisão grande), caímos na região do Princípio da Incerteza (U.P., na Fig. 4.5) em que $b_{\min} = \hbar/2m_e v$. Nesse caso, as velocidades passam ser $v \geq (Z/137)c$ e contribuição dos elétrons passa a dominar quando $Z^2 R_y > kT$ ($= 1/2 m_e v^2$) no fator de Gaunt.

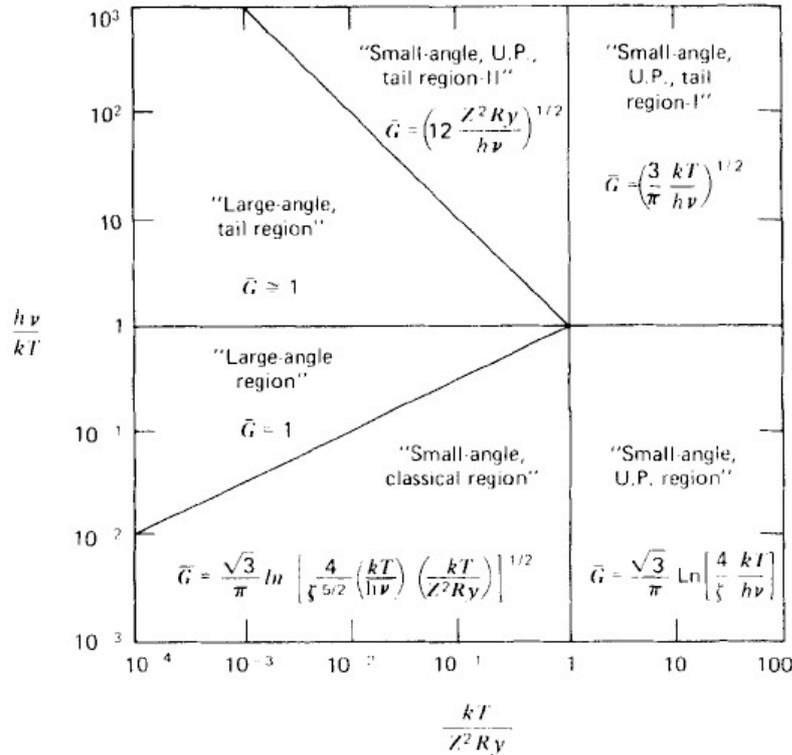


Figura 4.5 - Fórmulas analíticas aproximadas para o fator de Gaunt $\langle g_{\text{ff}}(v, T) \rangle$ utilizadas em Bremsstrahlung térmico. $\langle g_{\text{ff}}(v, T) \rangle$ é denominado \bar{G} na figura e a unidade de energia é o $R_y=13,6$ eV. Fonte: I. Novikov e K. Thorne (1973).

Note-se que, em ambos os casos de energias muito altas para a partícula ($kT/Z^2 R_y > 1$), fatores quânticos passam a dominar (U.P. Region) e a interação “clássica” entre elétron e núcleo deixa de ser importante. Nesses casos o fator de Gaunt passa depender somente da energia do plasma $(kT/h\nu)^{1/2}$ ou $\ln(kT/h\nu)$. Uma discussão detalhada da derivação do fator de Gaunt e dos limites de validade em função das energias envolvidas pode ser encontrada no artigo de Novikov e Thorne (1973), de onde foi retirada a Fig. 4.5.

A perda por emissão Bremsstrahlung não relativístico sofrida por uma partícula é calculada integrando a intensidade específica (Eq. 4.13) em todas as frequências de emissão possíveis, isto é, de 0 até ω_{\max} , que está relacionada a b_{\min} pela relação $\omega_{\max} = 2\pi/\tau = 2\pi v/b_{\min}$, em que τ é o tempo característico de interação. Assim, podemos escrever $\omega_{\max} = 4\pi m_e v^2/\hbar$ e escrever:

$$\begin{aligned}
-\frac{dE}{dt}_{Brems} &\approx \int_0^{\omega_{max}} \frac{4Z^2e^6}{3\pi^2} \frac{\gamma N}{c^3m_e^2v} \ln(\Delta) d\omega \\
&\approx \frac{4Z^2e^6}{3\pi^2} \frac{\gamma N}{c^3m_e^2v} \ln(\Delta) \frac{4\pi m_e v^2}{\hbar} \\
&= \frac{16Z^2e^6}{3\pi} \frac{\gamma N}{c^3m_e} \frac{v}{\hbar} \ln(\Delta) \\
&= (\text{Constante})Z^2Nv
\end{aligned} \tag{4.19}$$

4.5 - Absorção Bremsstrahlung

O processo de absorção Bremsstrahlung é importante na região de baixas frequências do espectro de radiação, uma vez que ele ilustra o procedimento padrão de relacionar coeficientes de emissão e absorção e contém a assinatura característica de regiões compactas HII na faixa de rádio. É possível esquematizar o problema usando a equação de transferência radiativa,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \alpha_\nu I_\nu - j_\nu \tag{4.20}$$

e considerar a situação de equilíbrio termodinâmico, de tal forma que o lado esquerdo de (4.20) é zero e cada emissão é balanceada por uma absorção, num processo conhecido como princípio de balanço detalhado. Em equilíbrio termodinâmico, $I_\nu = B_\nu(T)$, em que $B_\nu(T)$ é a função de Planck, dada por

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/\kappa T} - 1} \tag{4.21}$$

Substituindo (4.21) em (4.20) na situação de equilíbrio termodinâmico, determinamos o coeficiente de absorção α_ν para a emissão Bremsstrahlung no regime térmico:

$$\alpha_\nu = \frac{j_\nu c^2}{2h\nu^3} [e^{h\nu/\kappa T} - 1] \tag{4.22}$$

Usando a expressão (4.16) e a expressão (1.18) do Ribicki e Lightman ($j_\nu = \epsilon_\nu/4\pi$), podemos expressar o coeficiente de absorção α_ν em função dos parâmetros usados para descrever a emissão Bremsstrahlung:

$$\alpha_\nu = \text{Constante} \frac{T^{-1/2} N N_e}{\nu^3} \bar{g} [1 - e^{-h\nu/\kappa T}] \tag{4.23}$$

A derivação das expressões para os regimes de alta e baixa frequência ($h\nu \gg \kappa T$ e $h\nu \ll \kappa T$, respectivamente) serão deixados como exercício para o leitor. A Fig. 4.6 mostra um gráfico, sem unidades, referente às três regiões de emissão Bremsstrahlung.

4.5 - Bremsstrahlung relativístico

Utilizaremos a Eq. 4.13 para estimar a taxa de perda radiativa de um elétron em movimento com velocidade relativística. Será necessário redefinir os parâmetros de colisão b_{\max} e b_{\min} e garantir que a emissão de radiação continuará sendo coerente. Os efeitos de emissão de partículas com velocidades relativísticas causam um efeito de colimação do feixe, como já visto nas primeiras aulas deste curso, e o que deve ser entendido agora são as condições para que o elétron continue emitindo de forma coerente. Outro ponto importante que deve ser lembrado é que, como b_{\max} e b_{\min} são dimensões lineares perpendiculares à direção do movimento, eles devem ter o mesmo valor tanto no referencial do íon quanto do elétron.

A diferença, no caso relativístico, é que a dimensão de aproximação máxima do elétron deve agora levar em conta que pode haver uma interação entre o elétron relativístico e a nuvem de elétrons que circunda o núcleo. O modelo que trata do átomo nesse caso é o chamado modelo de Fermi-Thomas, em campo eletrostático sentido pelo elétron é do tipo Yukawa:

$$V(r) = \frac{Ze^2}{r} e^{-r/a} \quad (4.24)$$

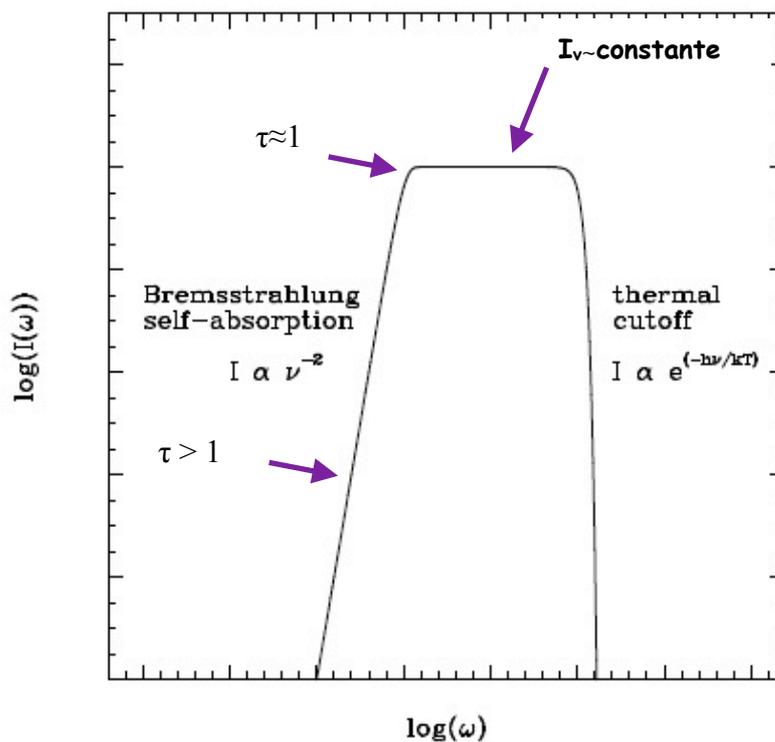


Figura 4.6 - Efeito da profundidade óptica no espectro Bremsstrahlung. A auto-absorção modifica o espectro em baixas frequências, com um comportamento obedecendo à lei de Rayleigh-Jeans para uma curva de corpo negro. Este é um espectro típico de gás denso e ionizado, tal como encontrado em regiões de formação estelar.

em que $a = 1,4 a_0 Z^{-1/3}$ e $a_0 = 0,53 \times 10^{-8}$ cm. No caso ultra-relativístico, $b_{\max} = a$. A expressão para a intensidade no caso relativístico fica, então:

$$I(\omega') = \frac{4Z^2 e^6}{3\pi^2} \frac{\gamma N}{c^3 m_e^2 v} \ln\left(\frac{1,4a_0}{Z^{1/3} \hbar} \frac{2m_e v}{\hbar}\right) \quad (4.25)$$

calculado no referencial do elétron. Devemos agora transformar a intensidade para o referencial do laboratório. Como sabemos que dE/dt é um invariante de Lorentz, somente é necessário definir como as frequências são vistas no referencial de laboratório. Sabendo que $\Delta\omega = \gamma\Delta\omega'$, vemos que a largura de banda é menor no sistema de laboratório por um fator γ , assim, $I(\omega') = I(\omega)/\gamma$. Sabemos que o espectro de intensidade é uma constante, isto é, independe da frequência até um valor máximo $E = \hbar\omega = (\gamma-1)m_e c^2$. Essa é a energia máxima possível numa colisão, quando o elétron “para” e irradia toda sua energia cinética. Assim, a integral deve ir de 0 até $\omega_{\max} = E/\hbar$, dando:

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dt}_{rel} &= \int_0^{E/\hbar} I(\omega) d\omega \\ -\frac{dE}{dt}_{rel} &= \frac{4Z^2 e^6}{3\pi^2} \frac{NE}{m_e^2 c^4 \hbar} \ln\left(\frac{192}{Z^{1/3}}\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

O fator dentro do logaritmo deve-se à substituição das constantes físicas presentes, sendo que o fator 2 foi desconsiderado. O termo c^4 aparece ao considerarmos $v \sim c$ e o fator γ presente em (4.25) desaparece devido à transformação $I(\omega') = I(\omega)/\gamma$.

Uma forma comum de se escrever as perdas de energia em geral (não somente via Bremsstrahlung) é definir uma relação do tipo $dE/dx \propto E$. Essa expressão possui uma solução exponencial e pode-se, então, definir um comprimento de corte, X_0 , tal que esse seja o comprimento característico para a radiação perder $(1 - 1/e)$ de sua intensidade original.

4.6 - O Cenário astrofísico

Regiões emissoras de Bremsstrahlung são, em geral, **plasmas quentes** e os elétrons, ao sofrer grandes acelerações nas **colisões Coulombianas**, emitem uma grande quantidade de fótons e escapam da nuvem, caso esta seja **ópticamente fina**. A energia irradiada em uma única colisão pode ser aproximada por emissão de dipolo, usando a fórmula de Larmor e lembrando que essa aproximação só é válida no limite não relativístico ($v \ll c$). A frequência característica da emissão, ω , é uma função do tempo de colisão, da velocidade do elétron e do parâmetro de impacto. A energia total emitida é função da densidade iônica integrada sobre o intervalo de velocidades de uma distribuição Maxwelliana (**emissividade volumétrica $j_v(\mathbf{v})$**).

É importante notar também que a maior parte da emissão em frequências $h\nu \leq kT$ (já que a distribuição é Maxwelliana). A integração de **$j_v(\mathbf{v})$** sobre todas as frequências e sobre o volume do plasma nos dá a **luminosidade da nuvem** e essa luminosidade, integrada ao longo da linha de visada nos permite obter a **intensidade específica**. A intensidade específica é proporcional à medida de emissão (emission measure - EM) que é a integral na linha de visada do produtos das densidades de elétrons e íons. A integração da intensidade específica sobre todo o ângulo sólido da fonte fornece a **densidade de fluxo espectral S**. O procedimento descrito acima nos permite obter

dois parâmetros físicos essenciais para caracterizar a região emissora: **a temperatura e a medida de emissão, independente da distância à nuvem.**

A emissão Bremsstrahlung está associada diretamente a regiões astrofísicas quentes, uma vez que são necessárias altas temperaturas para criar e manter um plasma que tenha íons e elétrons livres interagindo na presença de campos elétricos e magnéticos. Encontramos essas condições em atmosferas estelares, regiões centrais de AGNs, objetos compactos acretao matéria, regiões HII, em que o gás circundante é ionizado pelos fótons UV da estrela (emissão do óptico até rádio) e aglomerados de galáxias (Bremsstrahlung em raios X). A Fig. 4.7 mostra um espectro de emissão Bremsstrahlung para elétrons relativísticos, imersos em um plasma com $T=5 \times 10^7$ K e densidade eletrônica $n_e = n_i = 10^6 \text{ m}^{-3}$. Deve-se notar a diferença causada pela utilização correta do fator de Gaunt.

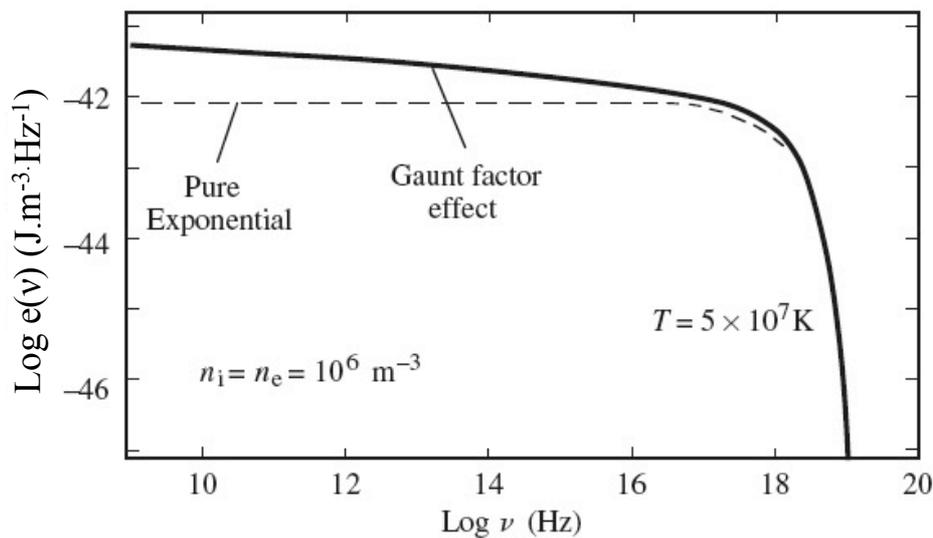


Figura 4.7 - Curva de emissividade do plasma (em unidades MKS), dadas pela eq. 4.16 considerando a variação de G com a frequência (linha cheia) e g constante (linha tracejada)

5 - A emissão sincrotron

Partimos da constatação básica que partículas aceleradas por um campo magnético emitem radiação. A natureza dessa radiação no caso não relativístico é simples, com a frequência de emissão proporcional ao campo magnético que acelera a partícula; esse caso é conhecido como emissão ciclotron. No caso da emissão relativística, ocorre uma amplificação proporcional ao fator γ ($= (1-v^2/c^2)^{-1/2}$), e os elétrons passam a emitir numa frequência característica muito maior do que frequência de giro ($\omega = qvB/mr$). Essa radiação foi investigada mais profundamente a partir da década de 50 e era conhecida como “bremsstrahlung magnético”. O termo sincrotron foi usado pela primeira vez no final dos anos 40, para definir a radiação emitida por elétrons confinados em um duto circular e acelerados por campos elétricos. Ele significa, de uma forma livre, “synchronized circulation”, e expressa o fato de que os campos elétricos que aceleram os elétrons são sincronizados com sua frequência de circulação à medida que a energia aumenta.

Esse tipo de espectro é chamado “não-térmico”, em contraste com a lei de potência “térmica” crescente da curva de corpo negro, na região de Rayleigh-Jeans. O espectro não-térmico é esperado, nesse caso, porque os elétrons que produzem a radiação não se encontram em equilíbrio térmico com a vizinhança (muito energéticos e baixa densidade numérica). A intensidade específica e o espectro de emissão sincrotron dependem da densidade eletrônica e da intensidade do campo magnético e, a partir de uma dada frequência (a chamada frequência de corte, que será definida mais à frente) a intensidade comporta-se como uma lei de potência decrescente.

Adicionalmente, a emissão sincrotron pode ser alterada pela presença de linhas de campo magnético ligeiramente curvas (p. ex., na magnetosfera de estrelas de nêutrons) produzindo o que se chama de radiação de curvatura. O movimento da partícula será uma espiral em torno das linhas de campo, somado a uma deriva ao longo da mesma linha, caso o raio de Larmor (r_L) seja muito menor que o raio de curvatura da linha de campo. Essa deriva pode ser tratada (localmente) como um movimento em torno de um círculo de raio R e produzirá, também, emissão sincrotron. Nesse caso a velocidade de deriva é dada pela expressão:

$$\vec{v}_c = \frac{v_{||}}{\omega_B R} \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{RB_0} \quad (5.1)$$

em que \vec{R} é o vetor do centro de curvatura da linha até a posição da carga.

A situação de interesse astrofísico ocorre, como no caso de emissão Bremsstrahlung, na presença de um campo magnético presente num plasma (não no vácuo), em que um “ensemble” de elétrons emitindo radiação em forma de lei de potência decrescente é uma situação comum em astrofísica. Existem, na literatura, registros de observações de emissão sincrotron desde a faixa de rádio até raios gama de alta energia. O objeto clássico em que a emissão aparece em diversos comprimentos é a região do Caranguejo (Crab), envolvendo um pulsar e a nebulosa resultante da explosão de supernova que produziu o pulsar. É interessante notar que a maioria dos casos de emissão contínua em astrofísica é sincrotron e, em geral, ela é POLARIZADA (podendo chegar, no caso da

componente difusa, a cerca de 70% do total da radiação medida). Casos típicos são a emissão solar (rádio e óptico), a emissão em rádio na Galáxia (disco e halo), a emissão em rádio de envelopes de supernovas, a emissão em rádio de galáxias ativas, a emissão em raios X de quasares. Emissão síncrotron é também o processo dominante em astrofísica de altas energias

O espectro dos fótons emitidos pode ser calculado tanto a partir dos potenciais clássicos de Lienard-Wiechert vistos por um observador distante, ou transferindo o cálculo para o referencial de repouso do elétron e calculando o espectro de espalhamento Compton devido aos fótons virtuais produzidos pelo campo magnético. Adotaremos o segundo procedimento aqui e a discussão do primeiro procedimento pode ser encontrada no trabalho de Blumenthal e Gold (1970).

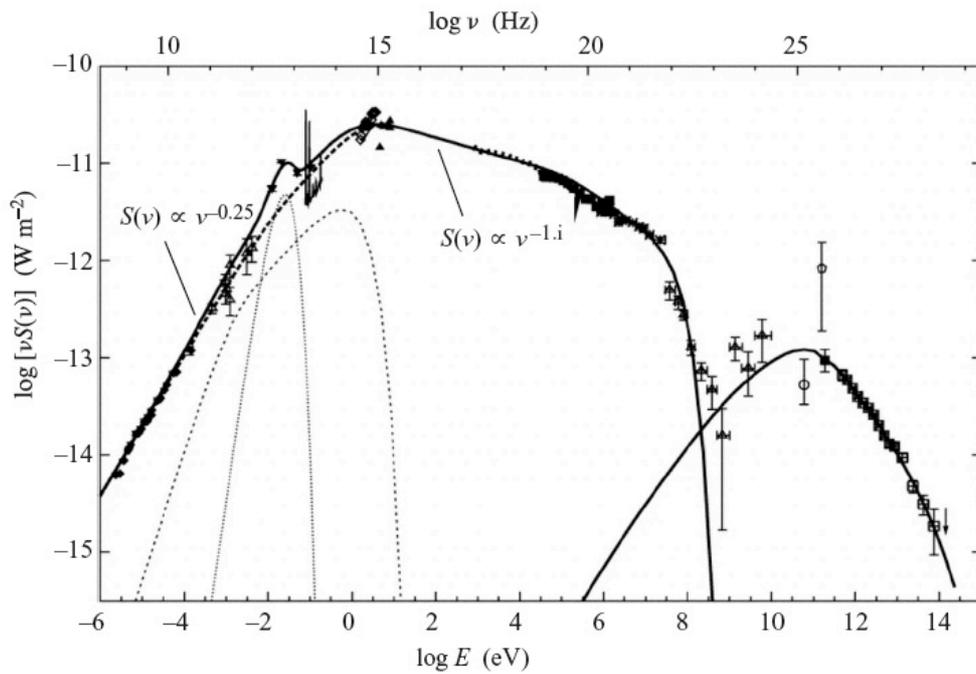


Fig. 5.1: Distribuição espectral de energia (SED), $nS(n)$, para fótons da Nebulosa do Caranguejo em 19 ordens de grandeza em frequência (rádio até raios gama de energia da ordem de TeV). Os segmentos de reta e medidas de polarização indicam que a maior parte da emissão até 100 MeV é emissão síncrotron. As linhas sólidas são um ajuste aos dados de um modelo de emissão síncrotron auto-Comptonizada (SSC), para um campo magnético da nebulosa da ordem de 16 nT com contribuições de uma região de emissão milimétrica em rádio e de poeira da nuvem (picos mais estreito e mais largo, respectivamente - curvas pontilhadas claras). A linha pontilhada mais densa é a contribuição SSC sem essas duas componentes. O pico em energias de TeV deve-se a fótons síncrotron que sofreram espalhamento Compton inverso (Fonte: F. Aharonian *et al.*, *ApJ* **614**, 897 (2004)).

5.1 - Formulação do problema

Vamos derivar o caso relativístico e reduzi-lo ao caso não relativístico posteriormente, lembrando que o cálculo será feito no referencial do elétron. Partimos da força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.2)$$

em que E é o campo elétrico, B é o campo magnético, v é a velocidade da partícula, q é a carga da partícula e c é a velocidade da luz. Se $B \perp v$, teremos o movimento confinado a um plano. Se $v \cdot B \neq 0$, teremos uma componente paralela e a partícula realizará um movimento helicoidal, superpondo v_{\parallel} e v_{\perp} . A aceleração angular pode ser escrita, usando as leis de Newton, na forma:

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{qv_{\perp}B}{\gamma mc} \quad (5.3)$$

em que γ é o fator de Lorentz. Dessa expressão tiramos a frequência de giro, ω_B :

$$\omega_B = \frac{qB}{\gamma mc} \quad (5.4)$$

E a potência emitida pelo elétron é dada em função das acelerações paralela e perpendicular:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 [a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2] \quad (5.5)$$

Podemos ver, de imediato, dois casos particulares. Quando $a_{\parallel}=0$ ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}=0$), o movimento fica confinado a um plano. Quando $a_{\perp}=\omega v_{\perp}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}=v_{\perp}B \sin \alpha$, o movimento acelerado do elétron produz uma emissão cuja intensidade é:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 \frac{q^2 B^2}{\gamma^2 m^2 c^2} v_{\perp}^2 \quad (5.6)$$

sendo α o ângulo entre o campo magnético e a direção do movimento da partícula (**pitch angle**). Integrando α sobre todos os ângulos possíveis teremos $\langle \sin^2 \alpha \rangle = 2/3$. Note-se que, ao se integrar em α , a integração é feita vendo todos as direções possíveis entre a velocidade (variável) e o campo magnético (fixo ou não). Então, pode-se escrever $\langle \beta_{\perp}^2 \rangle = 2\beta_{\perp}^2/3$ e, ao definirmos $r_0 = q^2/mc^2$ (o chamado raio clássico do elétron) e lembrarmos que $U_{\text{mag}} = B^2/8\pi$, a Eq. (5.6) fica:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4r_0^2}{9} \gamma^2 \beta_{\perp}^2 B^2 \quad (5.7)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta_{\perp}^2 U_B^2 \quad (5.8)$$

$\sigma_T = (8\pi r_0^2)/3$ é a seção de choque do elétron para espalhamento Thomson. Note que dE/dt encontra-se em unidades de intensidade vezes volume! A escala de tempo para perdas de energia por emissão sincrotron pode ser obtida, para um elétron, dividindo sua energia pela radiação emitida:

$$t_{\text{sinc}} \sim 5 \times 10^8 (\gamma B) \sim 10^{10} \left(\frac{B}{10^{-6}} \right)^{-2} (E/\text{GeV})^{-1} \text{ anos para } \beta \sim 1 \quad (5.9)$$

A radiação emitida vai ser colimada num cone cuja abertura $\theta \sim 1/\gamma$, devido ao efeito relativístico de “beaming” visto no cap. 3 do livro “Radiative Processes in Astrophysics” (Ribicki e Lightman 1979). Esse direcionamento da radiação terá diversas implicações que serão discutidas a seguir.

5.2 - Implicações da emissão relativística

A primeira consequência imediata da emissão relativística e do efeito de “beaming” é que a radiação não é mais emitida de forma isotrópica, de forma que um observador somente verá a radiação se estiver na linha de visada do ângulo sólido de abertura $\Delta\theta$. Podemos ver que o campo elétrico no ponto de observação, em qualquer instante, é função de $\gamma\theta$. Isso é uma manifestação do efeito de “beaming”, em que θ é um ângulo polar em torno da direção de movimento. Essa dependência é uma consequência das Eqs. 4.6 a 4.10 do livro “Radiative Processes in Astrophysics” (Ribicky e Lightman 1979). Elas apresentam a dependência das componentes de velocidade paralela e perpendicular com o ângulo θ que define a direção da emissão dos fótons no referencial em movimento (Figs. 5.2 e 5.3).

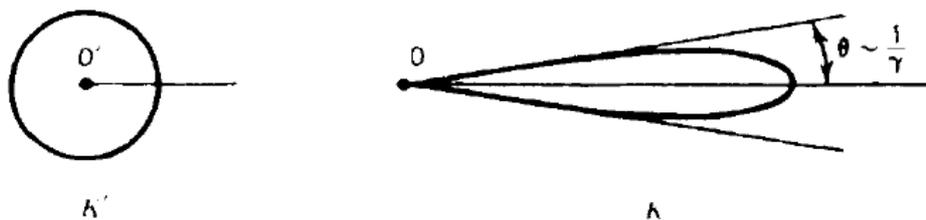


Figura 5.2 - Efeito de “beaming” visto pelo observador no referencial do observador (K) e emissão isotrópica vista pelo elétron em seu próprio referencial (K’).

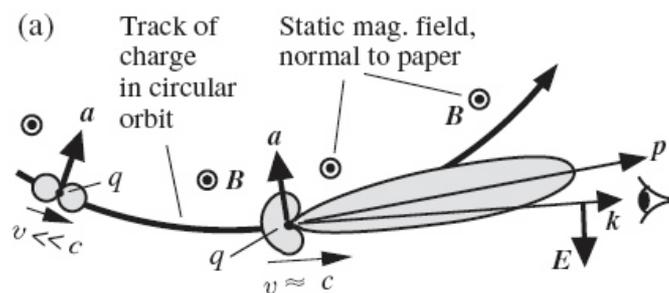


Figura 5.3 - Padrão de radiação para uma carga positiva movendo-se com velocidade v em um círculo, na presença de um campo magnético B direcionado para fora da folha. A aceleração instantânea aponta para o centro do círculo. Para $v \ll c$ o padrão de radiação é o toróide à esquerda. Para $v \sim c$, a radiação é fortemente concentrada para a frente do movimento. Em ambos os casos o padrão de emissão é o padrão visto pelo observador.

Relacionamos o tempo de chegada da radiação (t) com θ usando considerações geométricas (Fig. 5.4). Podemos definir a distância Δs percorrida pelo elétron ao longo da trajetória circular em torno do campo magnético (saindo do plano da folha na Fig. 5.2) como $\Delta s = r\Delta\theta$. Entretanto, $\Delta\theta = 2/\gamma$, para que as faces dos cones ainda estejam em contato, definindo o início e o final da recepção da emissão pelo observador. Assim, $\Delta s = 2r/\gamma$.

O raio de curvatura r pode ser calculado a partir da eq. de movimento e, usando considerações cinemáticas, podemos escrever $|\Delta \mathbf{v}| = v \Delta \theta$ e $\Delta s = v \Delta t$. Usando o valor de Δs encontrado no parágrafo anterior:

$$r = \Delta s / \Delta \theta = (v^2) \Delta t / |\Delta \mathbf{v}| \quad (5.10)$$

Usando a Eq. 5.3, obtemos:

$$\Delta s / \Delta \theta = (v_{\perp}^2) \gamma m c / (q v_{\perp} B \sin \alpha) \rightarrow r = v_{\perp} / \omega_B \sin \alpha \quad (5.11)$$

Levando em conta o atraso da emissão entre os pontos 1 e 2 na Fig 5.4, definimos $\Delta t_{\text{obs}} \sim \Delta t - r \Delta \theta / c$, sendo o segundo termo correspondente. Assim o Δt_{obs} é referente à propagação da radiação dos pontos 1 e 2 até o observador; $\Delta t = r \Delta \theta / v$ refere-se ao tempo que o elétron leva para mover-se do ponto 1 ao 2. O termo $r \Delta \theta / c$ é o intervalo de tempo “retardado”, correspondendo à diferença entre a chegada dos pulsos dos pontos 1 e 2 ao observador. Assim, podemos escrever que $\Delta t_{\text{obs}} = r \Delta \theta / v (1 - v/c)$. No caso que estamos tratando, $\gamma \gg 1$, logo podemos considerar o termo $v/c \rightarrow 1$, da seguinte forma:

$$1 - \beta = 1 - \beta \frac{(1 + \beta)}{1 + \beta} = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta)} \approx \frac{1}{2\gamma^2} \quad (5.12)$$

A dependência $\gamma \theta$ pode ser escrita como:

$$\gamma \Delta \theta = \gamma (v/r) (1 - v/c)^{-1} \Delta t_{\text{obs}} = 2 \gamma^3 \Delta t_{\text{obs}} \omega_B \sin \alpha \quad (5.13)$$

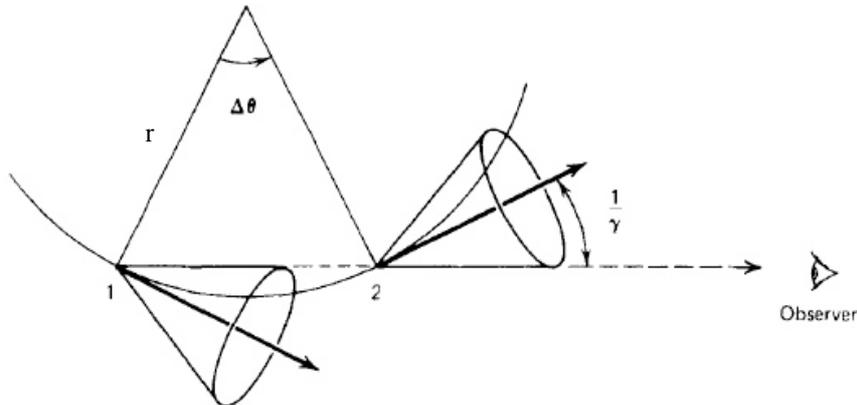


Figura 5.4 - Cones de emissão em vários pontos da trajetória de uma partícula acelerada.

Definimos uma frequência de corte (ou frequência crítica), tal que:

$$\begin{aligned} \omega_c &= \frac{3}{2} \left(\frac{q B \sin \alpha}{m c} \right) \gamma^2 \\ &= \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B \sin \alpha \\ &= \approx 10^2 \text{ MHz} \left(\frac{B}{10^{-6} \text{ G}} \right) \left(\frac{E}{\text{GeV}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Assim, $\gamma\Delta\theta = 2\gamma^3 \Delta t_{\text{obs}} \omega_B \sin\alpha = 4/3 \omega_c \Delta t_{\text{obs}}$. Essa definição é usada para caracterizar a região de frequências em que a potência emitida decresce rapidamente. A emissão atinge um pico numa frequência um pouco menor do que a frequência sincrotron ($\nu_{\text{sync}} = \gamma^2 \nu_B$) como mostrado na Figura 5.5. Assim, os parâmetros da frequência sincrotron (q , m_e , B , $\sin\alpha$) definem $\nu_{\text{pico}} = 0,44 \nu_{\text{sync}}$. Substituindo o valor de ν_c na expressão para ν_{pico} obtemos o valor comumente encontrado na literatura ($\nu_{\text{pico}} = 0,29 \nu_c$).

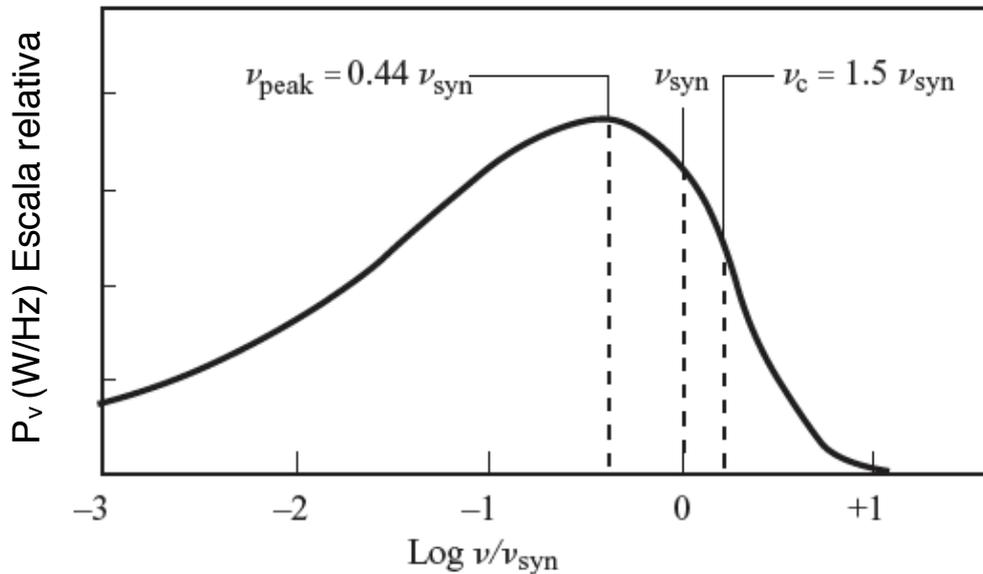


Figura 5 - Variação da potência emitida em função das frequências características da emissão sincrotron (Adaptada de Bradt 2008).

Qualitativamente podemos entender esse resultado da seguinte maneira: quando a partícula carregada move-se com $v \ll c$ (caso não relativístico), o movimento em torno do campo magnético é periódico, com frequência dada pela frequência de giro e a emissão é uma função de $\omega_{\text{ciclotron}} = \omega_B = qB/mc$. Esse é o caso conhecido como emissão ciclotron e a emissão ocorre somente nessa frequência. À medida que a velocidade aumenta, três efeitos alteram as características da emissão: 1) harmônicos de $\omega_{\text{ciclotron}}$ de ordem mais alta passam a contribuir para a emissão, com intensidades que dependem das potências de v/c ; 2) a frequência ω_B passa a diminuir proporcionalmente a γ^{-1} ; e 3) a radiação não é mais “isotrópica”, passando a ser confinada em um cone de abertura $\Delta\theta \sim 1/\gamma$. Isso faz com que o observador somente possa ver a radiação em intervalos $\Delta t \propto \gamma^{-3} \omega_B^{-1}$. No domínio das frequências, o observador deve observar picos em ω_B e seus harmônicos com um corte na frequência $\omega_c \propto 1/\Delta t \gamma^{-3} \propto \omega_B \gamma^{-3}$. Com o aumento de γ , os harmônicos passam a ficar cada vez mais próximos e, ao mesmo tempo, mais alargados, devido à distribuição de γ e do “pitch angle” (α). Essa situação é representada da Fig. 5.6. O aumento gradativo faz com que os diferentes harmônicos comecem a se superpor, tornando o espectro um “continuum” de emissão (Fig. 5.7), cujo pico está próximo de ω_c (daí a denominação de frequência de corte). A Figura 5.8 mostra o espectro de potência total da emissão sincrotron, destacando a localização da frequência de corte.

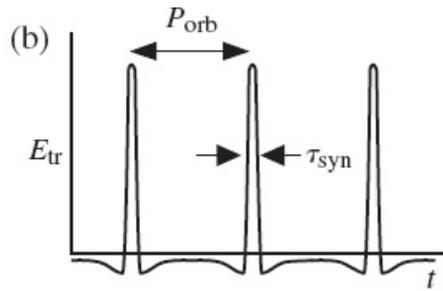


Figura 5.6 - Gráfico da componente transversal do campo elétrico visto pelo observador da Figura 5.3, quando $v \sim c$. As frequências dominantes detectadas são aproximadamente iguais ao inverso do tempo de duração de cada pulso sincrotron (Adaptada de Bradt 2008).

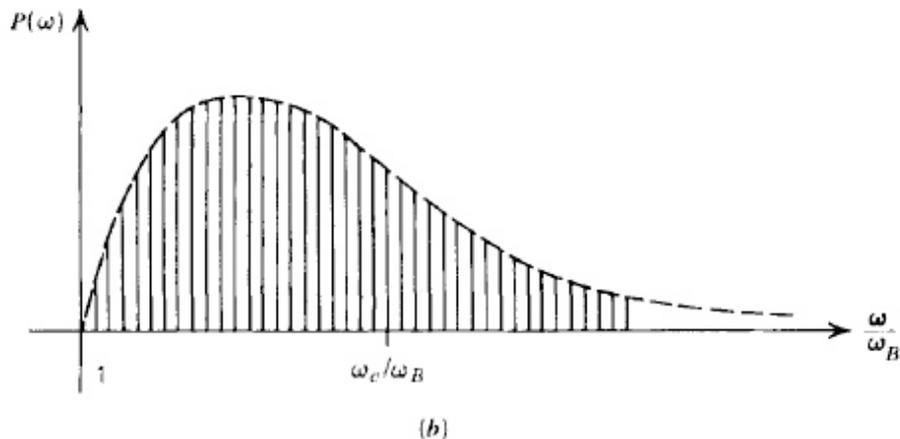


Figure 6.10b Power spectrum for a.

Figura 5.7 - Espectro de potência para a função da Fig. 5.5. Note a superposição dos harmônicos formando o “continuum” descrito no texto (Ribicky e Lightman (1979)).

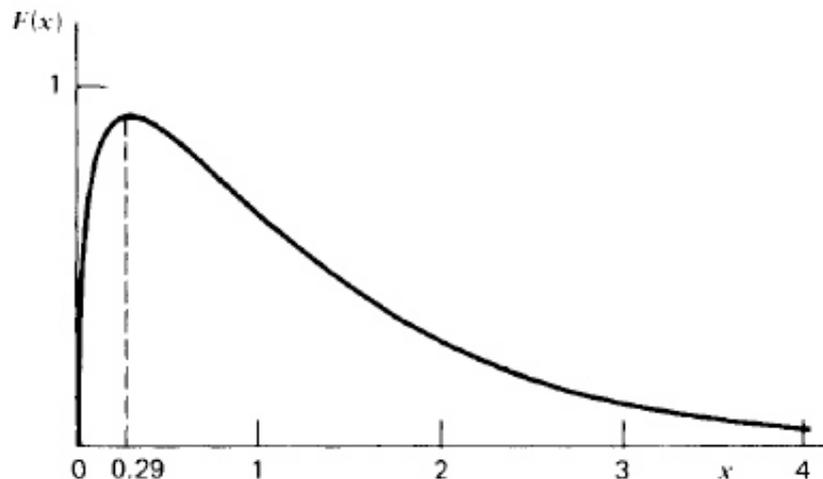


Figura 5.8 - Comportamento de $F(x)$, destacando a região da frequência de corte Ribicky e Lightman (1979)).

A discussão acima sugere que a energia irradiada por período orbital $(dE/d\omega)(1/T) \equiv dE/d\omega dt$ deve ser uma função de (ω/ω_c) . Podemos portanto, escrever uma expressão geral para $dE/d\omega dt = P(\omega) = C_1 F(\omega/\omega_c)$. Assim:

$$P = \int_0^\infty P(\omega) d\omega = C_1 \int_0^\infty F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) d\omega = \omega_c C_1 \int_0^\infty F(x) dx \quad (5.15)$$

em que $x = (\omega/\omega_c)$ e $dx = (d\omega/\omega_c)$. Já sabemos, da expressão (5.6), que a potência emitida por um único elétron é dada por:

$$\frac{dE}{dt} = P = \frac{2q^4 B^2 \gamma^2 \beta^2 \text{sen}^2 \alpha}{3m^2 c^3} \quad (5.16)$$

Usando (5.14) e (5.16) em 5.15, podemos estimar o valor de C_1 :

$$C_1 \propto \frac{q^3 B \beta^2 \text{sen} \alpha}{mc^2} \quad (5.17)$$

Assim:

$$P = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{q^3 B \beta^2 \text{sen} \alpha}{mc^2} \int_0^\infty F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) d\omega \quad (5.18)$$

A escolha da constante numérica deve-se à normalização que será feita na discussão do caso detalhado para $F(\omega/\omega_c)$.

5.4 - Comentários sobre a polarização...

A emissão sincrotron apresenta alto grau de polarização linear e isso é fácil de perceber ao analisar as componentes do campo elétrico visto no referencial do observador. Considerando um único elétron orbitando um campo magnético, para $v \ll c$, teremos a radiação linearmente polarizada no plano da órbita ($E \perp B, \mathbf{n}$), com o vetor elétrico oscilando confinado ao plano orbital. A radiação é circularmente polarizada na direção de B (vista da direção do leitor ou do outro lado da folha deste texto). Para $v \sim c$, a situação modifica-se drasticamente, já que a emissão fica praticamente confinada ao plano da órbita, devido ao efeito de “beaming”. Um “ensemble” de elétrons com uma distribuição de “pitch angles” faz com que as duas componentes da polarização circular se cancelem, restando somente a componente linear.

5.5 - Resumo do tratamento simplificado

A distribuição angular de uma única partícula emissora está localizada próximo (por um fator $1/\gamma$) no cone com ângulo igual à metade do “pitch angle”. O espectro de uma única partícula vai até uma frequência crítica ω_c , sendo somente função de ω/ω_c . Uma distribuição de partículas com energia E , seguindo uma lei de potência com índice espectral p , num intervalo suficientemente grande, origina um espectro de radiação com índice espectral s , tal que $s=(p-1)/2$

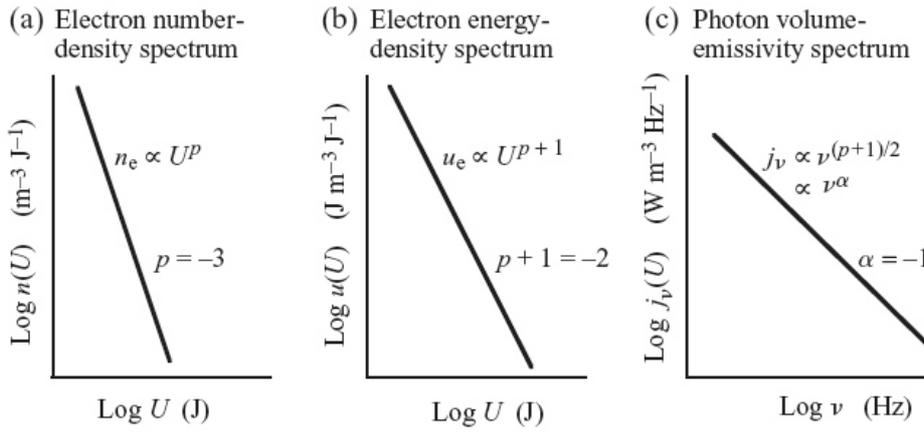


Figura 5.9 - Espectro de lei de potência para um sistema que emite radiação síncrotron. a) densidade numérica dos elétrons emissores; b) espectro de energia dos elétrons; c) espectro de energia dos fótons. Um índice espectral $p = -3$ foi adotado para a) e as curvas seguintes são consequência dessa escolha (Fonte: Bradt 2008).

5.5 - Discussão detalhada do espectro de emissão (intensidade total e polarização)

A análise a seguir tratará do problema do ponto de vista do observador e introduzindo os potenciais de Lienard-Wiechert. A partícula terá, em qualquer ponto de sua trajetória, uma componente paralela e uma perpendicular, que definirão sua polarização, tal que $\epsilon_{\parallel} = \mathbf{n} \times \epsilon_{\perp}$ (vide Fig. 5.8).

A partir da geometria da Figura 5.10, podemos definir a orientação do vetor de Poynting, dado por:

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \beta) = -\epsilon_{\perp} \sin(vt'/r) + \epsilon_{\parallel} \cos(vt'/r) \sin\theta \quad (5.19)$$

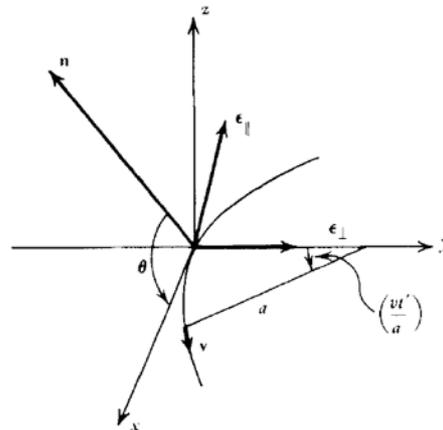


Figura 5.10 - Geometria da emissão polarizada, sendo ϵ_{\perp} e ϵ_{\parallel} as orientações da polarização e \mathbf{n} é a direção do vetor de Poynting, perpendicular a ϵ_{\perp} e ϵ_{\parallel} . (vt'/a) , que no texto foi substituído por (vt'/r) é o ângulo entre a linha de campo magnético e a direção do movimento que produz a trajetória curvilínea.

Esse valor será substituído na expressão da potência irradiada por um único elétron, calculado usando os potenciais de Lienard-Wiechert (exp. 3.13 do “Radiative Processes in Astrophysics”):

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{4\pi^2 c^2} \left| \int \vec{n} \times (\vec{n} \times \beta) \exp[i\omega(t' - \vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')/c)] dt' \right|^2 \quad (5.20)$$

Substituindo (5.19) em (5.20), teremos as componentes paralela e perpendicular da polarização:

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{dW_{\perp}}{d\Omega d\omega} + \frac{dW_{\parallel}}{d\Omega d\omega} \quad (5.21)$$

$$\frac{dW_{\perp}}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int \frac{ct'}{a} \exp\left[\frac{i\omega}{2\gamma^2} \left(\theta_{\gamma}^2 t' + \frac{c^2 \gamma^2 t'^3}{3r^2}\right)\right] dt' \right|^2 \quad (5.22a)$$

$$\frac{dW_{\parallel}}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2 \theta^2}{4\pi^2 c} \left| \int \exp\left[\frac{i\omega}{2\gamma^2} \left(\theta_{\gamma}^2 t' + \frac{c^2 \gamma^2 t'^3}{3r^2}\right)\right] dt' \right|^2 \quad (5.22b)$$

Em (5.22a) e (5.22b) os argumentos da exponencial foram obtidos observando que, pela geometria da Figura 5.8,

$$\begin{aligned} t' - \vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')/c &= t' - \frac{a}{c} \cos\theta \operatorname{sen}\left(\frac{vt'}{a}\right) \\ &\approx \frac{1}{2\gamma^2} \left[(1 + \gamma^2 \theta^2) t' + \frac{c^2 \gamma^2 t'^3}{3r^2} \right] \end{aligned} \quad (5.23)$$

Obtivemos a expressão (5.23) expandindo seno e cosseno para pequenos valores nos argumentos:

$$\operatorname{sen}(x) \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

$$\operatorname{cos}(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$$

E, para $\beta=v/c \sim 1$, $(1 - v/c) \approx 1/2\gamma^2$. Em (5.23), definimos

$$\theta_{\gamma} \equiv 1 + \gamma^2 \theta^2 \quad (5.24)$$

Fazemos então duas mudanças de variáveis para redefinir o argumento da exponencial em (5.22a) e (5.22b):

$$y \equiv \gamma \frac{ct'}{r\theta_{\gamma}} \quad \eta \equiv \frac{\omega r \theta_{\gamma}^3}{3c\gamma^3} \quad (5.25)$$

transformando as eqs. (5.22a e 5.22b) em:

$$\frac{dW_{\perp}}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{r\theta_{\gamma}^2}{\gamma^2 c} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} y \exp\left[\frac{3}{2} i\eta \left(y + \frac{1}{3} y^3\right)\right] dy \right|^2 \quad (5.26a)$$

$$\frac{dW_{\parallel}}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2 \theta^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{r\theta_{\gamma}}{\gamma^2 c} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{3}{2} i\eta \left(y + \frac{1}{3} y^3\right)\right] dy \right|^2 \quad (5.26b)$$

Os limites puderam ser estendidos até o infinito porque a potência recebida pelo observador, como já dito várias vezes anteriormente, está limitada ao cone de emissão, sendo zero fora dele. Além disso, o ângulo θ que define o cone é muito pequeno, de modo que $\theta_{\gamma} \approx 1$ na eq. (5.24) e, na eq. (5.25), η fica:

$$\eta(\theta = 0) \equiv \frac{\omega r \theta_{\gamma}^3}{3c\gamma^3} = \frac{v\omega}{3c\gamma^3 \omega_B \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\omega}{2\omega_c} \quad (5.27)$$

Deve-se notar que a dependência de (5.26a) e (5.26b) é somente em η , que depende de ω . Essas integrais podem ser escritas como:

$$\frac{dW_{\perp}}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{r\theta_{\gamma}^2}{\gamma^2 c} \right)^2 K_{2/3}^2(\eta) \quad (5.28a)$$

$$\frac{dW_{\parallel}}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2 \theta^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{r\theta_{\gamma}}{\gamma c} \right)^2 K_{1/3}^2(\eta) \quad (5.28b)$$

em que $K_{1/3}$ e $K_{2/3}$ são funções modificadas de Bessel de ordem 1/3 e 2/3. A integral sobre o ângulo sólido em que a partícula emite ($\Omega/4\pi$) dá a energia irradiada pela partícula por intervalo de frequência por volta no plano normal projetado (Fig. 5.11). A alteração do fator numérico de $1/4\pi^2$ para $1/3\pi$ vem da transformação da integral para as funções modificadas de Bessel (conforme Abramowitz e Stegun, pág 447). Devido ao efeito de “beaming”, a radiação emitida por órbita fica praticamente toda confinada no ângulo sólido sombreado (na seção de cone definido pelo ângulo $\theta \sim 1/\gamma$) que, por sua vez, fica dentro do cone definido por α . Assim, o ângulo sólido que define a região que contém a radiação pode ser definido como $d\Omega=2\pi \cdot \text{sen}\alpha \cdot d\theta$ e as eqs. (5.28a) e (5.28b), integradas em $d\Omega$, ficam:

$$\frac{dW_{\perp}}{d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{r}{\gamma^2 c} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_{\gamma}^4 K_{2/3}^2(\eta) 2\pi \text{sen}\alpha d\theta = \frac{q^2 \omega^2 \text{sen}\alpha}{3\pi c} \left(\frac{r}{\gamma^2 c} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_{\gamma}^4 K_{2/3}^2(\eta) d\theta \quad (5.29a)$$

$$\frac{dW_{\parallel}}{d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{r}{\gamma c} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2 \theta_{\gamma}^2 K_{1/3}^2(\eta) 2\pi \text{sen}\alpha d\theta = \frac{q^2 \omega^2 \text{sen}\alpha}{3\pi c} \left(\frac{r}{\gamma c} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2 \theta_{\gamma}^2 K_{1/3}^2(\eta) d\theta \quad (5.29b)$$

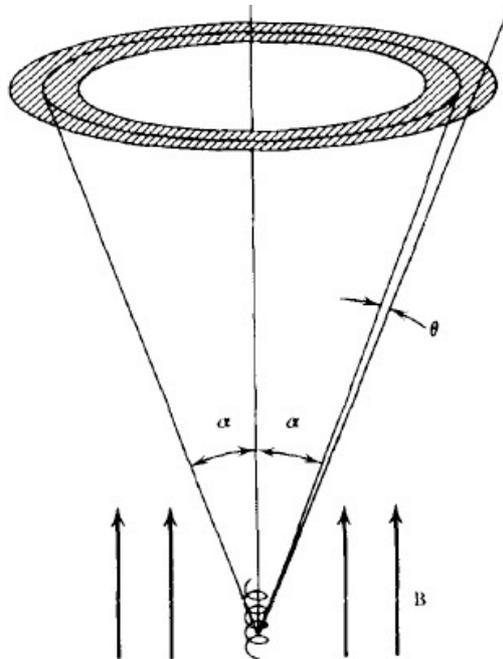


Figure 6.5 Synchrotron emission from a particle with pitch angle α . Radiation is confined to the shaded solid angle.

Figura 5.11 - Emissão sincrotron de uma partícula com “pitch angle” α . A radiação fica confinada ao ângulo sólido sombreado.

Um rearranjo das funções modificadas de Bessel permite que elas sejam escritas como as eqs. (5.30a) e (5.30b). Diversos outros textos seguem caminhos diferentes, mas com as aproximações para $x \ll 1$ e $x \gg 1$ (sendo $x = \omega/\omega_c$) feitas durante a discussão das integrais (ver, p.ex., Jackson, cap. 14, sec. 14.6).

$$\frac{dW_{\perp}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}q^2\gamma\text{sen}\alpha}{2c} [F(x) + G(x)] \quad (5.30a)$$

$$\frac{dW_{\parallel}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}q^2\gamma\text{sen}\alpha}{2c} [F(x) - G(x)] \quad (5.30b)$$

sendo

$$F(x) \equiv x \int_x^{\infty} K_{5/3}(\xi)d\xi \quad G(x) \equiv x K_{2/3}(\xi) \quad (5.31)$$

Convertemos (5.30a) e (5.30b) em potência total dividindo o lado direito por $T = 2\pi/\omega_B$, dando

$$P_{\perp}(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3B\text{sen}\alpha}{4\pi mc^2} [F(x) + G(x)] \quad (5.32a)$$

$$P_{\parallel}(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3B\text{sen}\alpha}{4\pi mc^2} [F(x) - G(x)] \quad (5.32b)$$

lembrando que $\omega_B = qb/\gamma mc$. Assim, a potência total emitida pela carga é a soma das eqs. (5.32), e nos dá:

$$P(\omega) = P_{\perp}(\omega) + P_{\parallel}(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3B\text{sen}\alpha}{2\pi mc^2} F(x) \quad (5.33)$$

No limite assintótico ($\omega \ll \omega_c$ e $\omega \gg \omega_c$)

$$F(x) \sim \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}, \quad x \gg 1 \quad (5.35a)$$

$$F(x) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-x} x^{1/2}, \quad x \ll 1 \quad (5.35b)$$

A Figura 5.12, adaptada de Bradt (2008), mas encontrada também no cap. 14 do “Classical Electrodynamics” (Jackson, Fig. 14.7) pode dar uma boa idéia de como a radiação emitida pelo elétron em movimento em torno do campo magnético é deformada e se desloca em espiral do centro para fora da região do movimento. As linhas de campo elétrico \mathbf{E} instantâneas referem-se a uma partícula positivamente carregada (círculo preto cheio) quando ela está na posição mostrada em 5.12. Ela se move ao longo de uma trajetória circular (branca) centrada em “+” com velocidade $v=0,85c$ em um campo magnético saindo da folha. Os padrões de campo mostrados são originários de acelerações em instantes anteriores. Eles “espiralam” para fora da figura com a velocidade da luz. No momento mostrado, a carga está se movendo para baixo com velocidade v e emitindo um fluxo de Poynting também para baixo, como um farol. Esse radiação será detectada mais tarde pelo observador. As linhas de campo transversais e reversas, fortemente agrupadas nos dentes (círculo aberto) representam um campo elétrico direcionado à direita, bastante intenso, originário da última volta da partícula (última passagem em relação à linha de visada). Linhas adicionais mostram um dente semelhante, ligeiramente à direita, apontados diretamente para o observador.

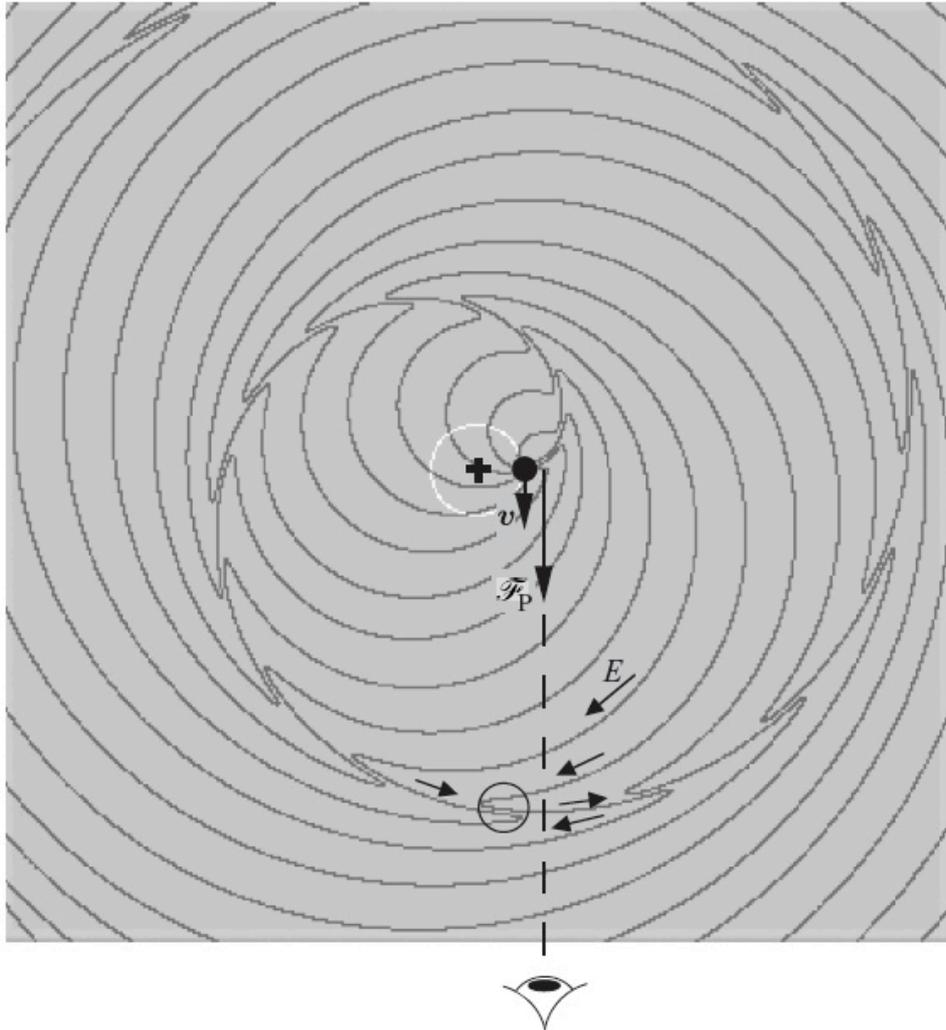


Figura 5.12 - Linhas de campo elétrico E instantâneas, referentes a a uma partícula positivamente carregada (círculo preto cheio) quando ela está na posição mostrada na figura. Ela veio se movendo ao longo de uma trajetória circular (branca) centrada em “+” com velocidade $v=0,85c$ em um campo magnético saindo da folha (ver discussão no texto).

5.5 - O índice espectral

Da expressão para a potência $P(\omega)$ (Eq. 5.18), nota-se que a única dependência com γ está em ωc . Podemos usar esse detalhe para derivar o índice espectral da emissão sincrotron, quando ela pode ser aproximada por uma expressão de lei de potência, num dado intervalo de frequências. A distribuição de partículas com energias relativísticas entre E_1 e E_2 pode ser escrita como:

$$N(E)dE = CE^{-p}dE \quad E_1 < E < E_2 \quad (5.36)$$

Sendo que C varia com o “pitch angle” e outras variáveis dinâmicas. A integral para a potência emitida por um único elétron pode ser reescrita com esse funcional de energia, dando:

$$\begin{aligned} P_{tot} &= C \int_{E_1}^{E_2} P(\omega) E^{-p} dE \\ &= C \int_{E_1}^{E_2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) E^{-p} dE \end{aligned} \quad (5.37)$$

Trocando de variáveis ($x \equiv \omega/\omega_C$) e lembrando que $\omega_C \sim \gamma^2$

$$P_{tot}(\omega) \propto \omega^{-(p-1)/2} \int_{x_1}^{x_2} F(x)x^{(p-3)/2} dx \quad (5.38)$$

E, para grandes intervalos de energia, a integral tende a uma constante, de forma que

$$P_{tot}(\omega) \propto \omega^{-(p-1)/2} \quad (5.39)$$

de forma que o índice espectral s da emissão está relacionado com o índice da distribuição de energia das partículas emissoras p , pela expressão $s = (p - 1)/2$

5.7 - Distinção entre potência emitida e absorvida

A principal questão a ser discutida nessa seção é que, devido ao efeito Doppler relativístico sofrido pelas partículas aceleradas, há uma alteração na frequência de emissão ω_B e os pulsos recebidos pelo observador sofrem um aumento na frequência devido ao movimento da partícula na direção do observador. A correção é feita em função do “pitch angle”, conforme mostrado na Figura 5.13.

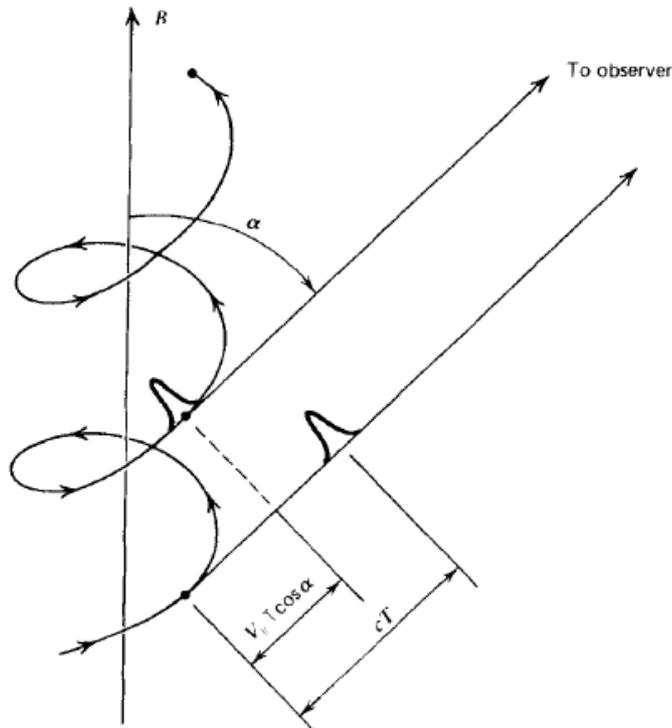


Figura 5.13 - Desvio Doppler da radiação síncrotron emitida por uma partícula movendo-se na direção do observador.

Da geometria vemos que $\lambda_{obs} = \lambda(1 - (v_{||}/c)\cos\alpha) = \lambda(1 - (v/c)\cos^2\alpha) \approx (2\pi/\omega_B)\sin^2\alpha$, e $v/c \sim 1$. Essa correção Doppler possui duas consequências:

1. O espaçamento dos harmônicos da emissão sincrotron são encurtados por um fator $\omega_B/\text{sen}^2\alpha$, e não ω_B , como visto no próprio referencial do elétron;
2. A potência recebida e a potência emitida diferem por um fator $1/\text{sen}^2\alpha$, tal que $P_r = P_e/\text{sen}^2\alpha$. Esse fator vem de que a potência recebida é obtida dividindo a energia emitida por T_A , o tempo de atraso entre a emissão e a chegada, na Fig. 5.13.

Esse fator de correção não é, entretanto, muito importante na maior parte dos casos astrofísicos.

5.8 - Auto-absorção sincrotron

A emissão sincrotron é acompanhada pela absorção, em que um fóton interage com uma carga num campo magnético e é absorvida, dando sua energia para a carga novamente. Um outro processo, já estudado, é a emissão estimulada, em que uma partícula é induzida a emitir mais fortemente numa direção e numa frequência em que já existem fótons emitindo. O tratamento, nesse caso, passa por descrever os muitos estados possíveis das energias inicial e final das partículas emissoras. A suposição de emissão isotrópica implica em que o campo magnético não pode ter uma direção preferencial, ou seja, deve estar “emaranhado”; a distribuição das partículas também deve ser isotrópica. Várias considerações sobre a emissão no contínuo podem ser feitas; em particular, pode-se perguntar como a fração dos fótons que não escapa da região emissora de sincrotron afeta o espectro resultante, do ponto de vista do observador. Nesse caso, nos interessa particularmente a expressão do coeficiente de absorção em função da distribuição de energia (e momentum) dos elétrons. Uma expressão geral para esse coeficiente é:

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int d^3p_2 [f(p_2^*) - f(p_2)] P(\nu, E_2) \quad (5.40)$$

em que $E_2 = E - h\nu$ é a energia de um estado livre do elétron e p_2 é o momentum correspondente à energia E_2 . Reescrevendo as funções dos “momenta” em termos da energia ($E=pc$), temos:

$$f(p)d^3p = 4\pi p^2 f(p)dp = 4\pi \left(\frac{E}{c}\right)^2 \left(\frac{dE}{c}\right) f\left(\frac{E}{c}\right) = N(E)dE \quad (5.41)$$

E a eq. (5.40) fica:

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int dE P(\nu, E) E^2 \left[\frac{N(E - h\nu)}{(E - h\nu)^2} - \frac{N(E)}{E^2} \right] \quad (5.42)$$

Quando $h\nu \ll E$, podemos expandir $N(E - h\nu)$ em uma série de Taylor em torno de $h\nu$:

$$\begin{aligned}
N(E - h\nu) \Big|_{h\nu} &= N(E) + \frac{\partial N(E)}{\partial E} (E - h\nu - h\nu) \\
&\sim N(E) + \frac{\partial N(E)}{\partial E} E
\end{aligned} \tag{5.43}$$

E a integral (5.42) fica:

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu &= \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int dE P(\nu, E) E^2 \left[\frac{1}{(E - h\nu)^2} \left(N(E) + \frac{\partial N(E)}{\partial E} E \right) - \frac{N(E)}{E^2} \right] \\
&\sim \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int dE P(\nu, E) E^2 \left[\frac{1}{E^2} \left(N(E) + \frac{\partial N(E)}{\partial E} E \right) - \frac{N(E)}{E^2} \right] \\
&\sim \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int dE P(\nu, E) E^2 \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{N(E)}{E^2} \right]
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Considerando uma distribuição de elétrons do tipo “lei de potência”, como foi usado para a emissão Bremsstrahlung, podemos escrever $N(E) = C E^{-p}$. Assim:

$$\begin{aligned}
E^2 \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{N(E)}{E^2} \right] &= (p + 2) C E^{-p-1} = (p + 2) \frac{N(E)}{E} \\
\alpha_\nu &= \frac{(p + 2)c^2}{8\pi\nu^2} \int dE P(\nu, E) \frac{N(E)}{E}
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Podemos usar as relações de proporcionalidade em (5.14) e (5.38) e argumentar que $P(\nu, E) \propto F(\omega/\omega_c) \propto F(\omega/E^2)$. Se fazemos uma troca de variáveis para colocar novamente a expressão em função de ω , temos:

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu &\propto \frac{(p + 2)c^2}{8\pi\nu^2} \int dE F(\nu/E) \frac{N(E)}{E} \\
&\propto \frac{(p + 2)c^2}{8\pi\nu^2} \int \frac{dx}{x} F(x) \left(\frac{\nu}{x} \right)^{p/2} \\
&\propto \nu^{-\frac{1}{2}(p+4)}
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Comparando a emissão e a absorção para frequências muito menores que ω_c , podemos usar a eq. (1.16) do “Radiative Processes in Astrophysics” combinada com (5.46) e (5.39), para obter a intensidade da radiação sincrotron no caso de auto-absorção. Como há absorção intensa, $I_\nu \approx S_\nu$ e

$$\begin{aligned}
I_\nu &= \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{P(\nu)}{4\pi\alpha_\nu} \\
&= \frac{\nu^{-\frac{1}{2}(p-1)}}{\nu^{-\frac{1}{2}(p+4)}} = \nu^{5/2}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Essa dependência com índice espectral ($\nu^{5/2}$) contrasta com a dependência típica de um corpo negro na região de Rayleigh-Jeans (ν^2). Duas conclusões podem ser tiradas daí: 1) o espectro é claramente

não térmico e 2) o comportamento não térmico implica que, em vez da distribuição de energia dos elétrons ser igual à dos fótons ($\propto kT$), ela deve ser descrita como a energia cinética de um elétron tipicamente relativístico ($E = \gamma m_e c^2$), com γ contendo a dependência das frequências conforme a eq. (5.14) ($\omega_c \propto \omega \gamma^2$). Considerando que, na região de Rayleigh-Jeans um espectro de corpo negro tem a forma:

$$I_\nu = \left(\frac{2h\nu^2}{c^2} \right) \kappa T$$

sendo o primeiro termo do lado direito devido à ocupação dos fótons no espaço de fase e o segundo a energia média dos fótons, ao substituirmos $\kappa T \rightarrow \gamma m_e c^2 = (\omega/\omega_c)^{1/2} m_e c^2$, a dependência $\nu^{5/2}$ aparece naturalmente.

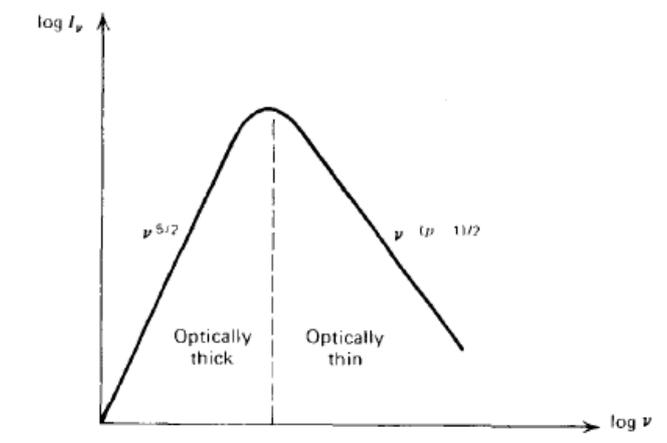


Figura 5.12 - Gráfico ilustrativo da emissão sincrotron, nos regimes ópticamente fino (emissão) e ópticamente espesso (auto-absorção).

5.9 - O contexto astrofísico

Várias situações podem representar o contexto astrofísico da emissão sincrotron. Um caso representativo de emissão localizada e extremamente polarizada é a Nebulosa do Caranguejo (Crab Nebula) e o pulsar a ela associado. As energias típicas dos elétrons envolvidos começam por volta de 300 MeV, na faixa de rádio, indo até 1000 TeV, para a faixa de raios X. Suas intensidades são surpreendentemente altas, em face da idade da Nebulosa, da ordem de 950 anos. O tempo de resfriamento dessa nebulosa, calculado como $\tau \sim E/(dE/dt) \sim$ dias para emissão na faixa de raios gama e da ordem de 100 anos para emissão no óptico. Como ele ainda é extremamente poderoso, mesmo sabendo que a explosão ocorreu há ~ 950 anos atrás, questionava-se qual seria o mecanismo que mantinha a emissão tão energética. Com a descoberta dos pulsares, associou-se a enorme energia armazenada durante o colapso de uma supernova tipo I na estrela de nêutrons de ~ 10 km de diâmetro, girando rapidamente à energia dos elétrons presos em seus enormes campos magnéticos. O pulsar do Caranguejo gira numa frequência de 190 Hz (ou 5 milissegundos), o que garante uma enorme energia transferida. Considerando que ele seja uma esfera rígida (aproximação apenas “razoável”, com cerca de 2 massas solares e 10 km de raio, a energia cinética associada a

ele é $E = 1/5 MR^2\omega^2=3 \times 10^{49}$ erg!!! $dE/dt = I\omega(d\omega/dt)=7,2 \times 10^{38}$ erg/s. A Figura 5.13 apresenta um desenho esquemático de uma emissão de um pulsar.

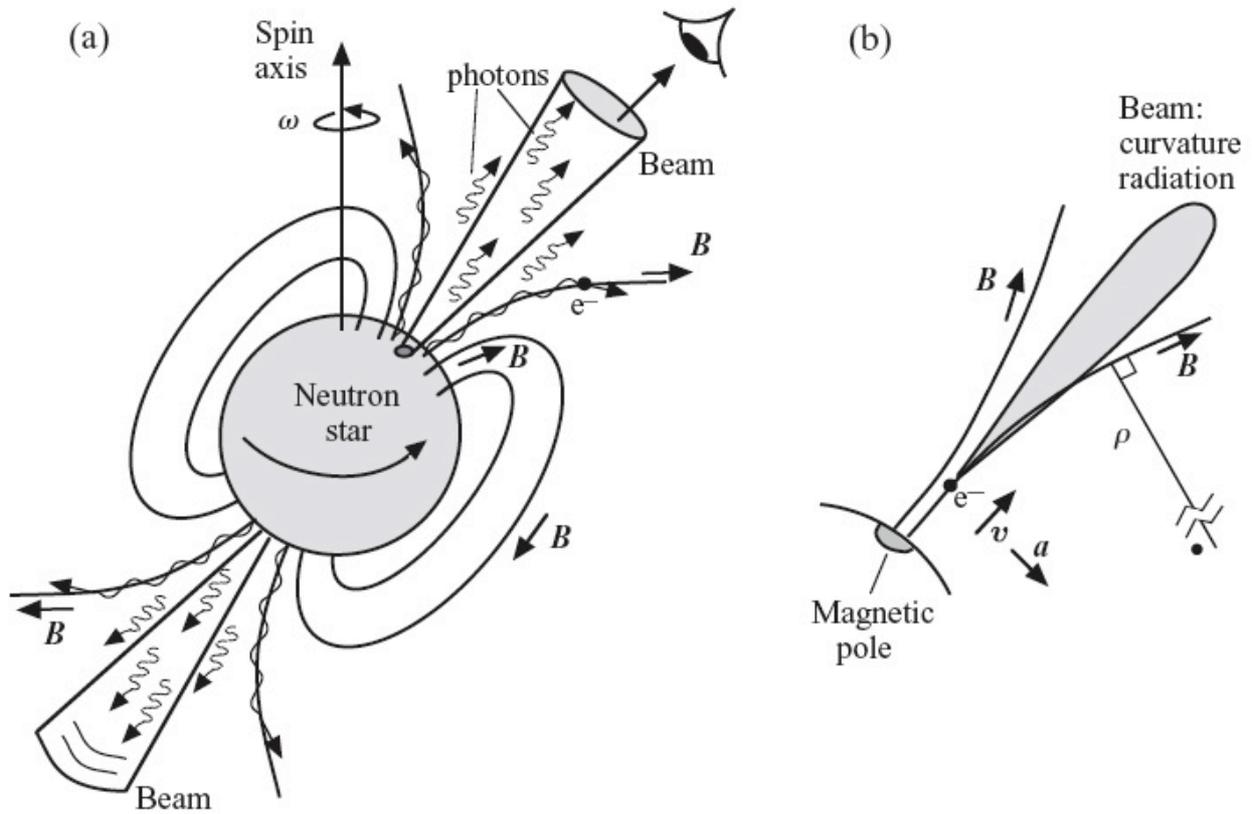
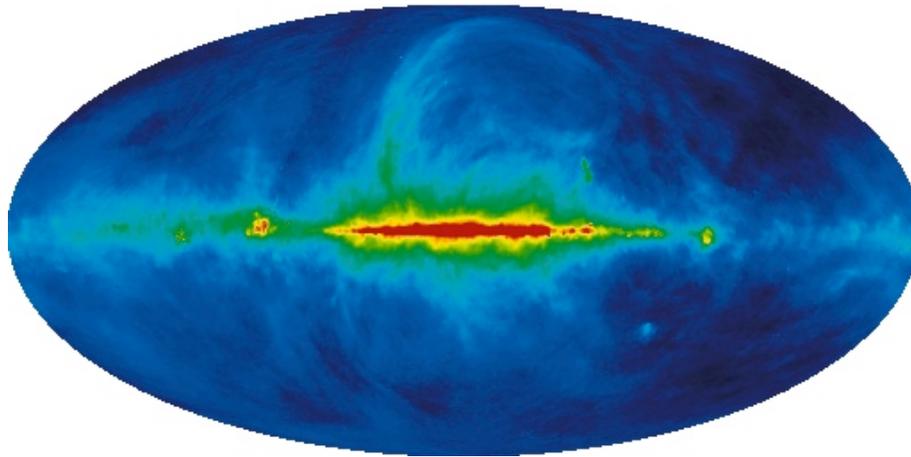


Figura 5.13 - (a) Estrela de nêutron em rotação com polo magnético não alinhado com o eixo. Os elétrons espiralam para fora ao longo das linhas de campo magnético e direcionam a radiação para os polos (os elétrons que estão representados espiralando não emitem radiação na direção do observador); (b) polo magnético mostrando o raio de curvatura e o feixe da radiação de curvatura de um único elétron emergindo do polo.

Um caso típico de emissão difusa, ou seja, em que a fonte não pode ser considerada um objeto puntiforme, é a emissão sincrotron da nossa Galáxia na faixa de rádio (tipicamente entre 100 MHz e 100 GHz). Ela é resultado da radiação emitida por elétrons cósmicos interagindo com o campo magnético Galáctico, estando principalmente concentrada na região do plano. Ela comporta-se claramente como uma lei de potência e apresenta um alto grau de polarização. As Figuras 5.14 a), b) e c) são mapas de emissão Galáctica em 408 MHz (Haslam et al. 1982), 2300 MHz (Tello et al. 2007) e 23 GHz (Gold et al. 2010).



Mapa de intensidade total em 2300 MHz

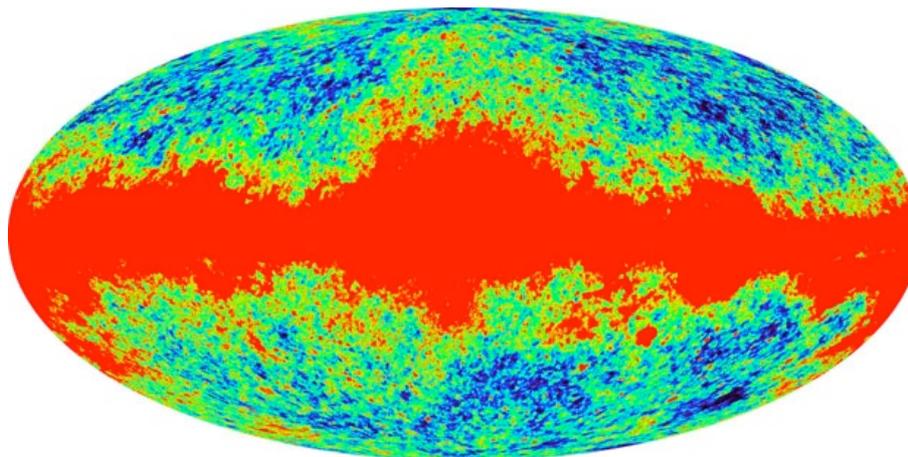
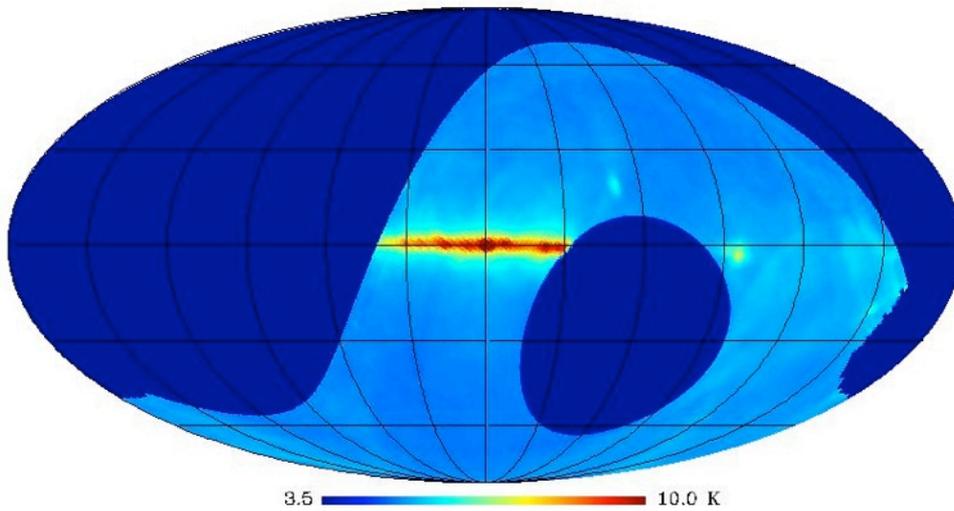


Figura 5.14 - a) Mapa de emissão Galáctica em 408 MHz (Haslam et al. 1982); b) idem, 2300 MHz (Tello et al. 2007); c) idem, 23 GHz feito pelo satélite WMAP (Gold et al. 2010). A região intensa no centro dos mapas é a emissão sincrotron do plano da Via Láctea. Os mapas não estão na mesma escala.

6 - O espalhamento Compton

Embora o espalhamento Compton seja o processo mais conhecido e descrito em laboratórios, em Astrofísica encontramos predominantemente o que chamaremos de processo de Comptonização: o espalhamento “inverso” de fótons de baixa energia por espalhamento Compton inverso em um gás de elétrons quentes. O cenário astrofísico ideal para se observar o espalhamento Compton pode ser encontrado em candidatos a buracos negros Galácticos, núcleos ativos de galáxias e no meio quente intra-aglomerado. Para elétrons de baixa energia ($h\nu \ll mc^2$) o processo dominante é o espalhamento Thomson, e a energia inicial do fóton é praticamente a mesma antes e depois da colisão, num processo de colisão elástica. O raio clássico e a seção de choque para espalhamento Thomson são dados nas eqs. (6.1) e (6.2) e o processo de espalhamento e polarização podem ser vistos na Fig. 6.1. No caso clássico praticamente não há variação dos comprimentos de onda inicial e final **mas** o fóton muda de direção, o que ocasiona mudança de momentum e energia.

$$r_0 = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 2,82 \times 10^{-13}$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \equiv \sigma_T = 6,65 \times 10^{-25}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_T} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2\theta)$$

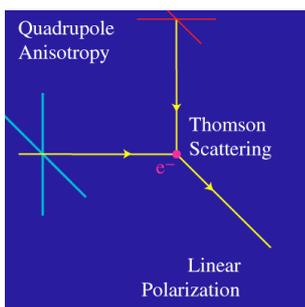
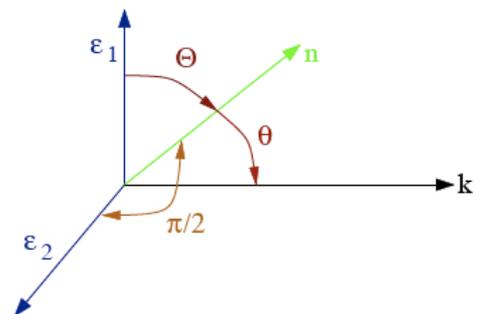
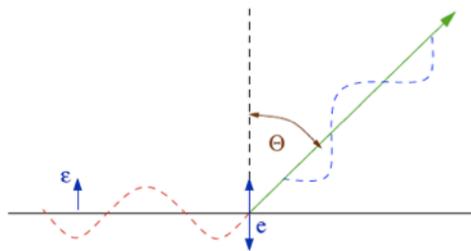


Figura 6.1 a b c

No caso quântico a situação se complica um pouco, uma vez que a descrição cinemática e as seções de choque são modificadas para levar em conta as alterações de energia, momentum e seção de choque. O fóton possui uma energia $h\nu$ e um momentum $h\nu/c$ e a colisão não é mais inelástica. A relação entre o comprimento de onda incidente e espalhado sai diretamente das equações de conservação de energia e momentum e sua dedução pode ser encontrada, p. ex., no “Física Quântica”(Eisberg). As eqs. (6.3) e (6.4) expressam a energia e o comprimento de onda no

referencial do observador:

o

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta)$$

A eq. (6.3) apresenta o resultado aproximado porque ainda estamos no regime não-relativístico, embora quântico, de forma que $E \ll m_e c^2$ e podemos expandir o denominador em uma forma binomial e fazer uma média em torno de θ , de forma a considerar o espalhamento aproximadamente isotrópico (praticamente 100% elástico). A consequência disso é que não há mudança na energia do fóton, visto no referencial de repouso do elétron. A expressão (6.3)

Momentum and energy conservation yield the energy and scattered angle of the electron in the classical effect. The increase of the photon energy in the IC process follows from the application of the classical effect in the energetic electron's frame of reference. In the interaction, a relativistic electron with Lorentz factor $\gamma = U/mc^2$ will increase the photon energy by a factor $\sim \gamma^2$. In jets, for example, this can propel x-ray photons up to extreme gamma-ray energies detected by TeV gamma-ray astronomers. The modification of photon spectra due to single or multiple IC scatters is called Comptonization.

Energetic electrons in a nebula containing magnetic fields will radiate by the synchrotron process. The synchrotron photons may then interact with the energetic electrons that created them via the IC process and thus be boosted to extremely high energies. This is known as the synchrotron self-Compton (SSC) process. The spectral energy distributions (SEDs) of the Crab nebula and of blazars exhibit pronounced IC peaks.

Thermal electrons in clusters of galaxies scatter the cosmic microwave background (CMB), causing a shift of the blackbody CMB spectrum to slightly higher frequencies, which is known as the Sunyaev-Zeldovich (S-Z) effect. Detection of this in the radio band together with supplementary x-ray spectra yields the distance to the cluster, which, with the redshift, provides an independent measure of the Hubble constant. The peculiar motions of clusters can also be obtained from such studies. This pertains to the evolution of large-scale structure of the universe.

A interação de um elétron relativístico com fator de Lorentz γ aumenta a energia do fóton por um fator γ^2 . Interações sucessivas entre elétrons e fótons produzem espalhamentos múltiplos e causam a modificação do espectro de fótons produzindo a chamada Comptonização, que será discutida mais detalhadamente na seção 6.4.

Sincrotron Auto-Compton (synchrotron self-Compton - SSC): elétrons energéticos em nebulosas, sujeitos a campos magnéticos intensos emitem radiação sincrotron. Os fótons sincrotron interagem com os elétrons que os criaram e são espalhados via efeito Compton inverso para energias mais altas.

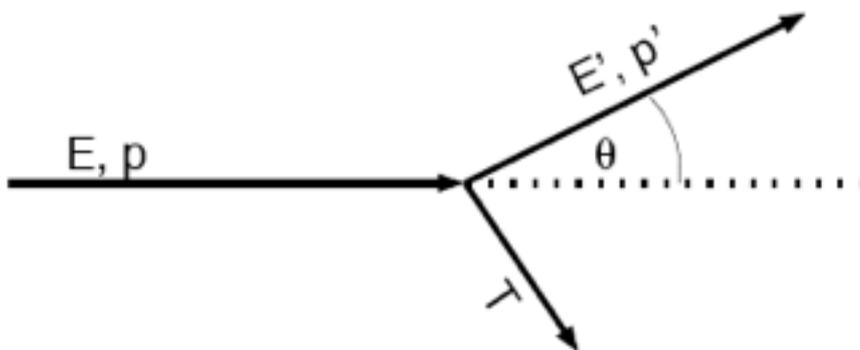
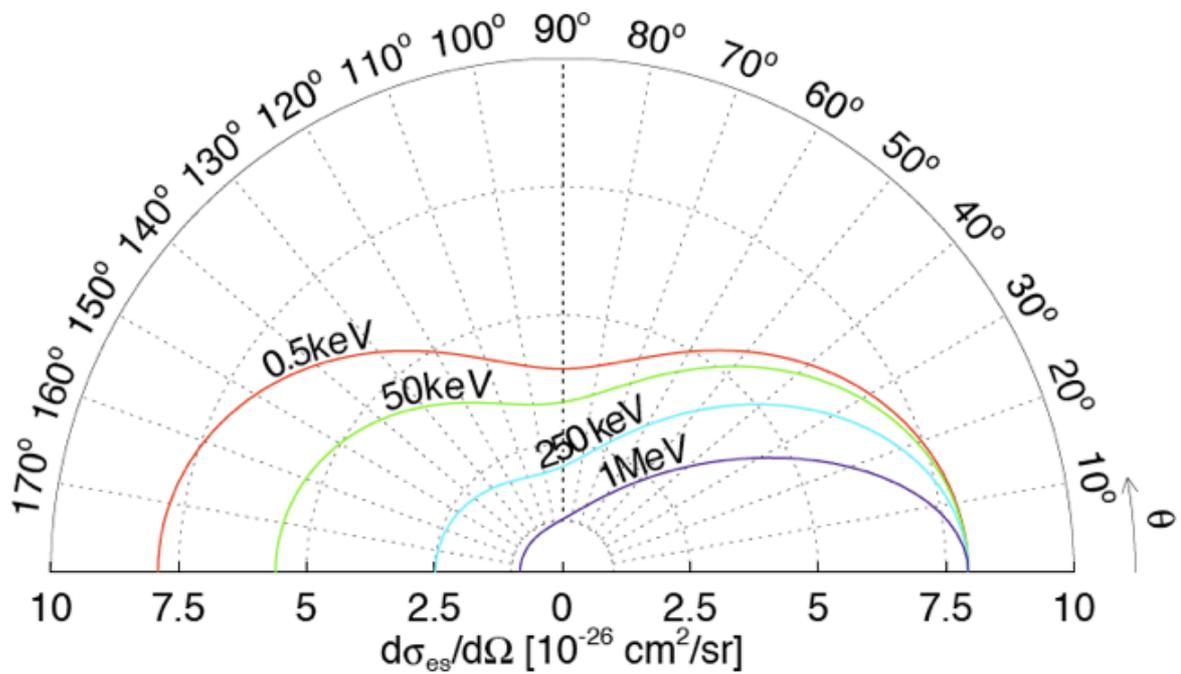
Elétrons térmicos ($T \sim 10^7 - 10^8$ K) no interior de aglomerados de galáxias espalham fótons da Radiação Cósmica de Fundo (RCFM) causando uma distorção na curva de corpo negro conhecida como efeito Sunyaev-Zeldovich (S-Z) effect.

$$\frac{\Delta E}{E} \approx -\frac{E}{m_e c^2}$$

Para $E = 6,4 \text{ keV}$, $\Delta E = 0,2 \text{ keV}$

Espalhamento Thomson (elástico)

Espalhamento Compton (extremamente



Seções de choque

Efeitos quânticos na seção de choque tradicional levam à fórmula de Klein-Nishina

Efeito principal: reduzir a seção de choque de seu valor clássico à medida que a energia do fóton cresce

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} &= \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{E_1}{E}\right)^2 \left(E/E_1 + E_1/E - \text{sen}^2\theta\right) \\ &= \frac{3}{16\pi} \sigma_T \left(E/E_1 + E_1/E - \text{sen}^2\theta\right)\end{aligned}$$

A seção de choque total para espalhamento Compton é obtida integrando-se em $d\Omega$ (Klein-Nishina):

$$\sigma = \sigma_T \cdot \frac{3}{4} \left[\frac{1+x}{x^3} \left\{ \frac{2x(x+1)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right\} + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right]$$

$$x \equiv \frac{h\nu}{mc^2}$$

No regime não relativístico ($x \ll 1$):

$$\sigma \approx \sigma_T \left(1 - 2x + \frac{26x^2}{5} + \dots \right)$$

E no regime ultra-relativístico ($x \gg 1$):

$$\sigma = \frac{3\sigma_T}{8} \frac{1}{x} \left(\ln(2x) + \frac{1}{2} \right)$$

Transferência de energia: espalhamento por elétrons em movimento

Para energias não-relativísticas, usamos as expressões anteriores, transportamos, via transf. de Lorentz, o fenômeno para o referencial do elétron ($v = 0$)

$$E_{e\text{letr}} = E_{lab} \gamma (1 - \beta \cos\theta)$$

Calculamos o espalhamento

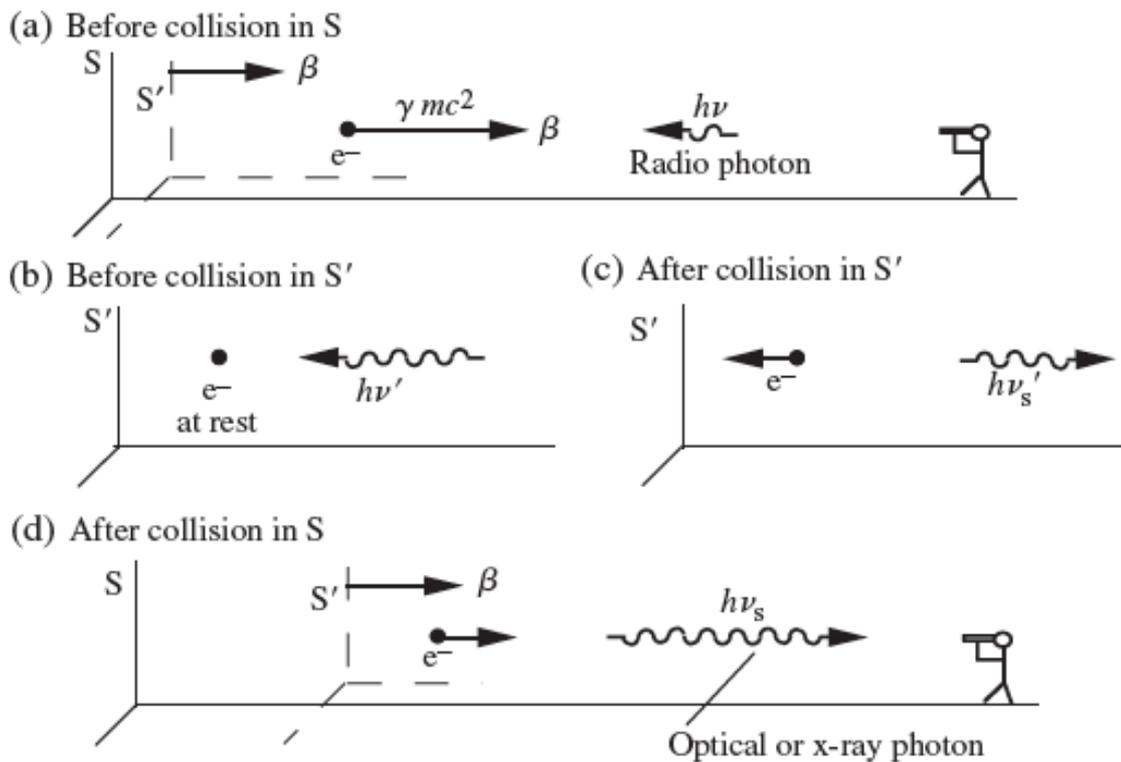
Transportamos de volta o problema para o referencial do laboratório

$$E'_{lab} = E'_{e\text{letr}} \gamma (1 + \beta \cos\theta)$$

Logo, no caso relativístico, $\beta=1$ e $\theta=\theta'=\pi/2$ e teremos

$$E_{lab'} \approx 2\gamma^2 E'_{lab}$$

Transferência de energia extremamente eficiente no limite Thomson. No caso de energias mais altas, efeitos quânticos diminuem a eficiência do processo, tanto reduzindo a possibilidade de espalhamento e tornando $E' < E$ na seção de choque de Klein Nishina



• Potência emitida por um único e^-

•

• Olhamos o caso de um único espalhamento num meio **opticamente fino**, para que a radiação possa ser vista. A potência total emitida no sistema de repouso do elétron é dada por:

•

$$\left. \frac{dE'_{FoR}}{dt_{FoR}} \right|_{em} = \int c\sigma_T E'_{FoR} V'(E'_{FoR}) dE'_{FoR}$$

•

- $V'(E')$ é a densidade de energia dos fóton. $V(E)$ está relacionada à densidade no espaço de fase:

$$V(E) dE = n(p) d^3p$$

Invariante de Lorentz!

- No limite de Thomson, a variação de energia do elétron é pequena e $E'_{e^-} = E_{e^-}$
- Como a potência **TAMBÉM** é um invariante de Lorentz:

$$\frac{V_{lab}(E_{lab})dE_{lab}}{E_{lab}} = \frac{V_{e^-}(E_{e^-})dE_{e^-}}{E_{e^-}}$$

$$\frac{dE_{lab}}{dt} = \frac{dE_{e^-}}{dt}$$

- Assim:



- e, fazendo a transformação de Lorentz para o sistema do elétron:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{lab}}{dt} \Big|_{em} &= c\sigma_T \int E_{e^-}^2 \frac{V_{e^-} dE_{e^-}}{E_{e^-}} \\ &= c\sigma_T \int E_{e^-}^2 \frac{V_{lab} dE_{lab}}{E_{lab}} \\ &= c\sigma_T \gamma^2 \int (1 - \beta(\cos)\theta)^2 E_{lab} V_{lab} dE_{lab} \end{aligned}$$

- Fazendo a média espacial sobre os ângulos (distr. “isotrópica”) temos $\langle \cos \theta \rangle = 0$, $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/3$, logo:

$$= c\sigma_T \gamma^2 \int \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right) U_{rad}$$

$$U_{rad} = \int EV(E)dE$$

Para determinar o ganho líquido do campo de fótons, é necessário subtrair a potência irradiada sobre o elétron

$$\frac{dE_{lab}}{dt} \Big|_{inc} = c\sigma_T \int EV(E)dE = c\sigma_T U_{rad}$$

E como $\gamma^2 - 1 = \gamma^2 \beta^2$, a potência líquida do campo de fótons é dada por:

$$\begin{aligned} P_{compt} &= \frac{dE_{lab}}{dt} \Big|_{em} - \frac{dE_{lab}}{dt} \Big|_{inc} \\ &= \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_{rad} \end{aligned}$$

$$P_{sinc} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta_{\perp}^2 U_B$$

$$\frac{P_{sinc}}{P_{Compt}} = \frac{U_B}{U_{\gamma}}$$

$$P_{Compt} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{rad}$$

- Consequencia (QED): emissão sincrotron equivale ao espalhamento Compton inverso de fótons virtuais pelos campos magnéticos dos objetos emissores.... não precisa dos elétrons para essa descrição!
- Se $U_{rad} > U_B$, $P_{compt} > P_{sinc} \rightarrow$ campo de fótons será MUITO amplificado \rightarrow eficiente para cortar a emissão sincrotron e resfriar os elétrons por efeito Compton inverso (**catástrofe Compton**).
- Consequência: T_b de fontes rádio limitada a $\sim 10^{12}$ K.

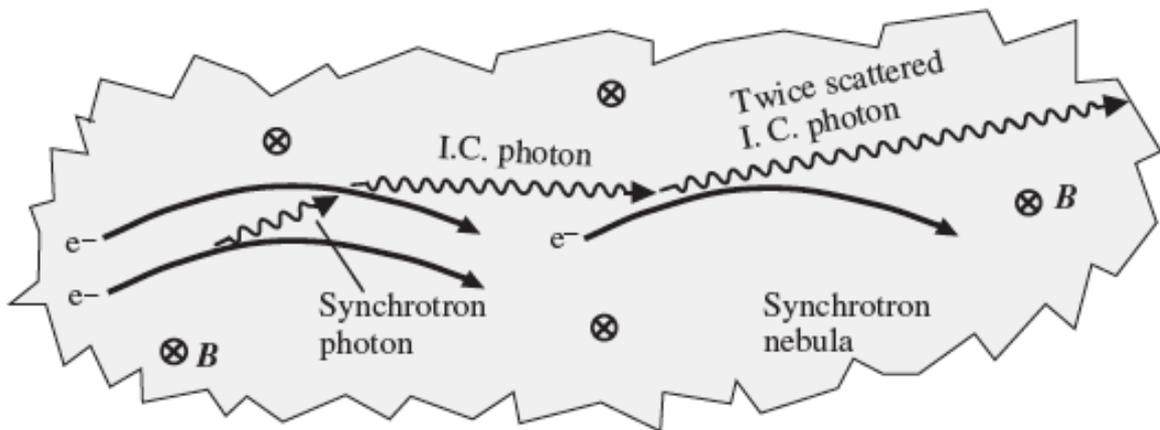


Fig. 9.4: Synchrotron self-Compton (SSC) process in a nebula with magnetic field B pointed into the page. Synchrotron photons are emitted by energetic electrons, resulting in a high-radiation energy density in the nebula. The photons then undergo inverse Compton (IC) scattering to high energies by the same electrons that give rise to the synchrotron photons. If the probability of a second IC scatter (as shown) becomes significant, the electron energy is rapidly depleted.

- Espalhamento Compton inverso por um único elétron**
- Dependência com a distribuição de energia dos elétrons e com o espectro de energia dos fótons incidentes
- Caso particular: distribuição isotrópica para fótons e elétrons \rightarrow fótons espalhados também terão distribuição isotrópica, restando calcular seu espectro de energia

- O cálculo é feito inicialmente no sistema de referência do elétron, usando a intensidade em função do no. de fótons, em vez da energia
- No caso não relativístico ($\gamma \ll 1$), a função de emissão (conforme o R&L), ou emissividade é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1 + \beta) \frac{E_f}{E_i} - (1 - \beta), & \rightarrow \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} < \frac{E_f}{E_i} < 1 \\ (1 + \beta) - \frac{E_f}{E_i} (1 - \beta), & \rightarrow 1 < \frac{E_f}{E_i} < \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} \\ 0, & \rightarrow \text{no restante dos casos} \end{array} \right\}$$

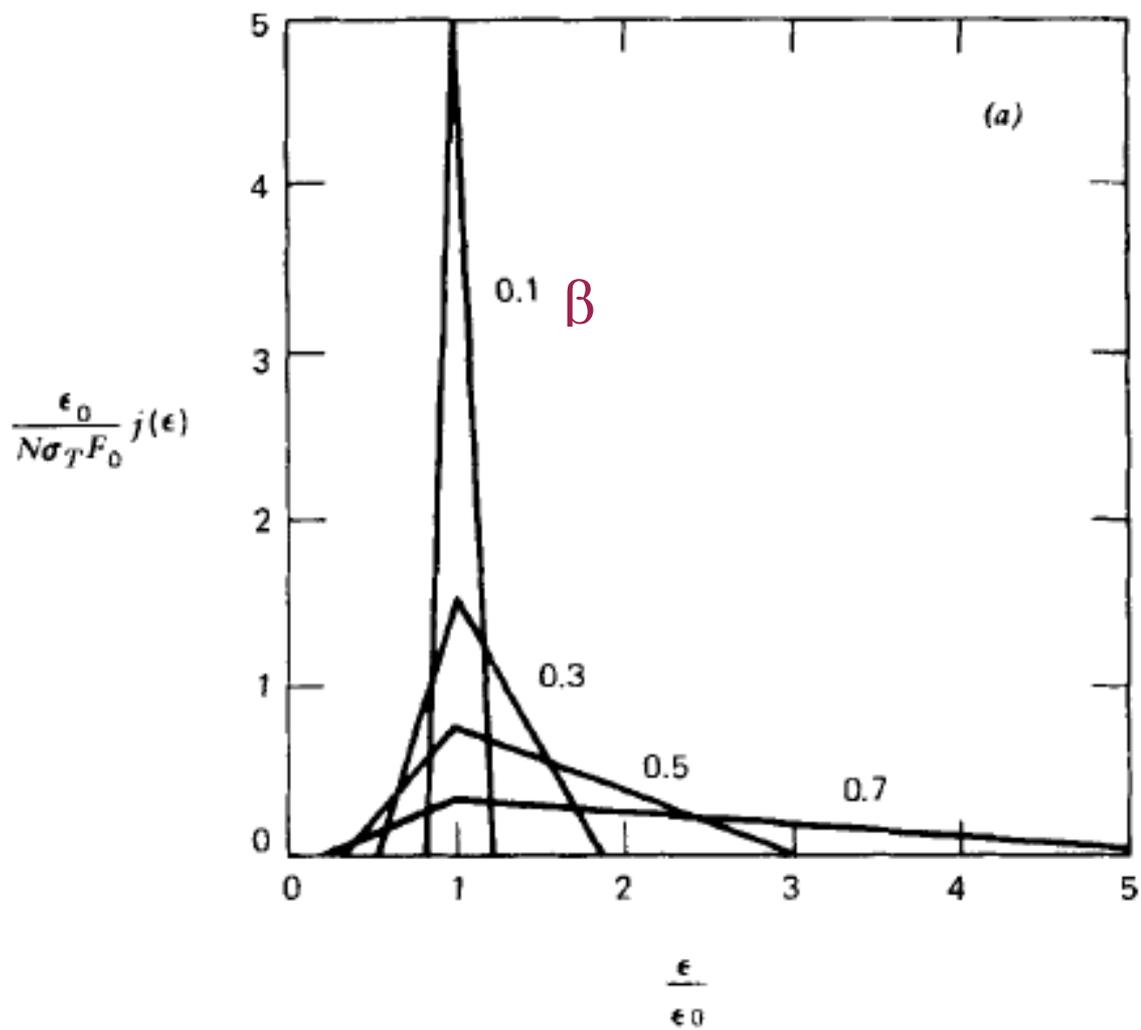
- N é a densidade do feixe de elétrons, F_0 é o número de fótons/unid. tempo unid. área unid. steradianos, E_i e E_f são as energias inicial e final dos fótons, γ é o fator de Lorentz.
- No caso ultrarelativístico ($\gamma \gg 1$), a emissividade é dada por:

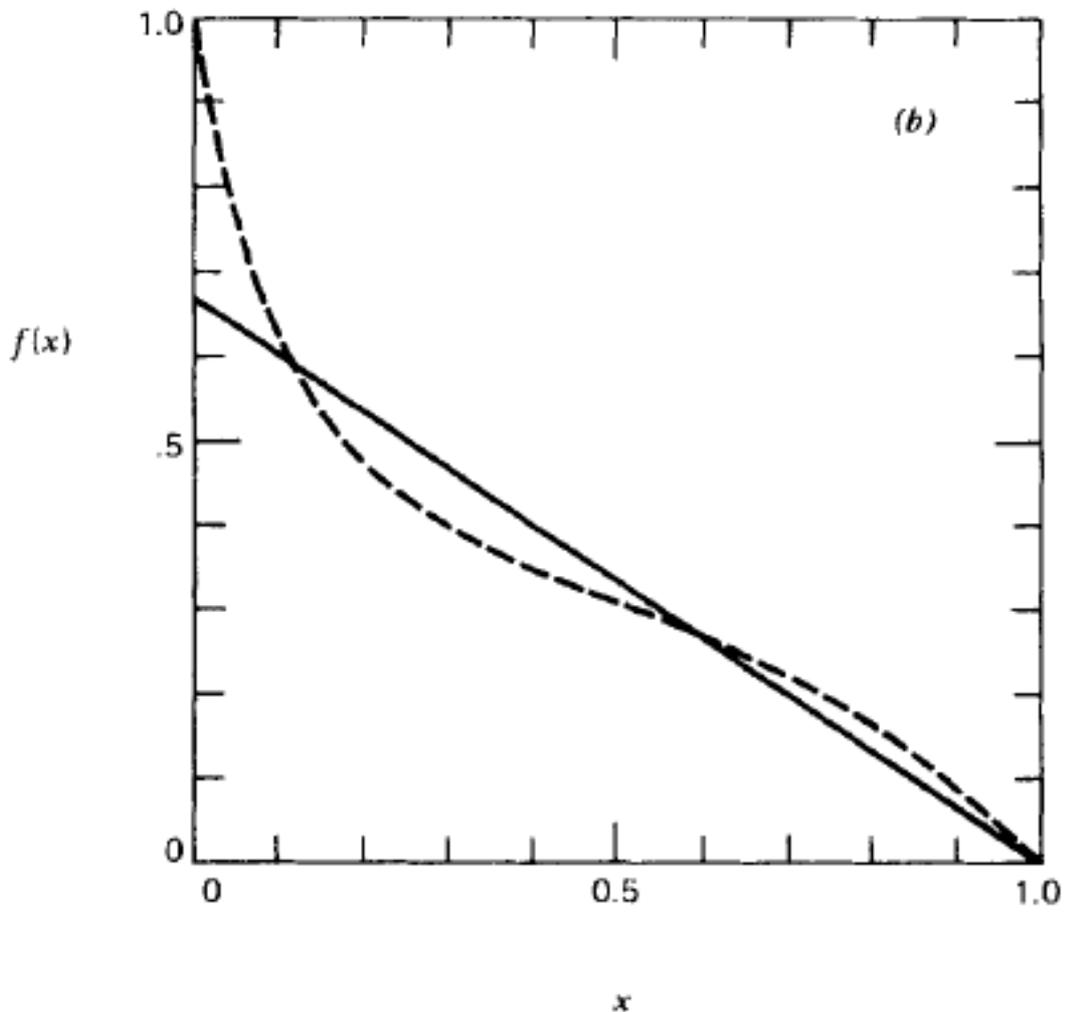
$$j(E_f) = \frac{3N\sigma_T F_0}{4\gamma^2 E_i} f_{iso}(x)$$

$$f_{iso}(x) \equiv \frac{2}{3}(1 - x), \quad x = \frac{E_f}{4\gamma^2 E_i}$$

Caso não isotrópico

$$f(x) = 2x \ln(x) + x + 1 - 2x^2$$





Espectro devido ao espalhamento Compton

- Distribuição inicial de elétrons $\propto E^{-p}$
- Potência total por energia por volume é dada por:

$$\frac{dE}{dV dt dE_f} = 4\pi E_f j(E_f)$$

- Pode-se mostrar que (R&L, sec. 7.3):

$$\frac{dE}{dV dt dE_f} = \pi c r_0^2 C A(p) E_f^{-(p-1)/2} \int dE E^{(p-1)/2} v(E)$$

- em que

$$A(p) \equiv 2^{p+1} \int_0^\infty dx x^{(p-1)/2} f(x) = 2^{p+3} \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2(p+5)(p+1)}$$

Note o índice espectral $s=(p-1)/2$ para a distribuição de energias dos fótons!!!

Transferência de energia por espalhamentos repetidos

Quais as condições que levam os processos de espalhamento a alterar significativamente a energia total dos fótons?

Condição de análise: $\gamma\varepsilon \ll mc^2$

No sistema de referência dos e^- , devemos ter:

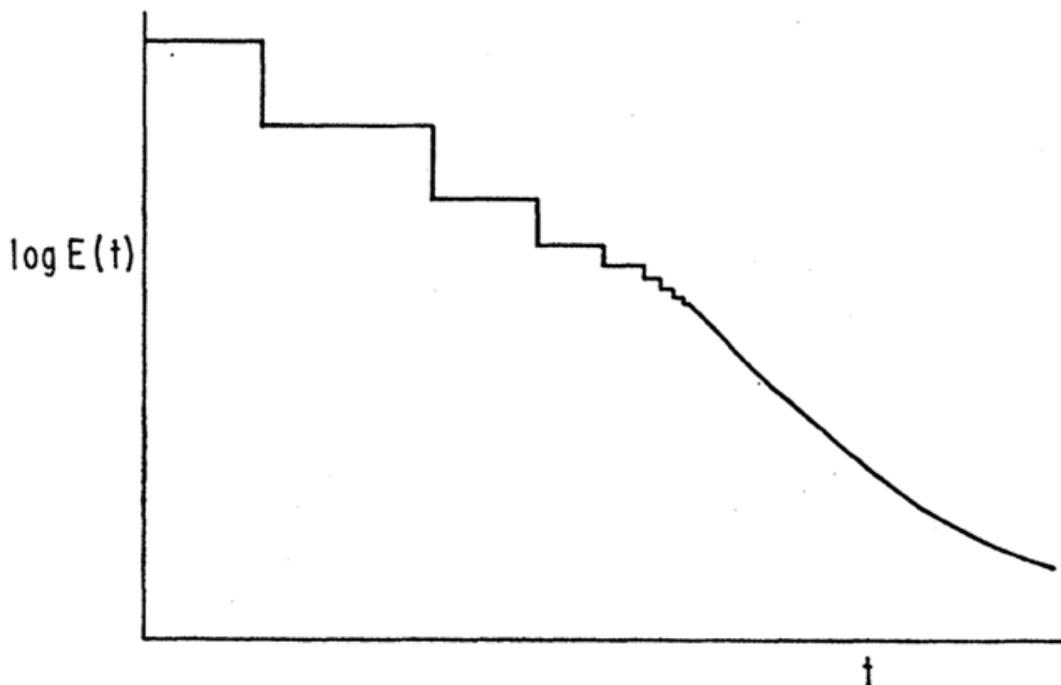
Ainda indeterminado...

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{E}{m_e c^2} + \frac{\alpha \kappa T}{m_e c^2}$$

$$\frac{\Delta E'}{E'} \equiv \frac{E'_1 - E'}{E'} \approx \frac{E'}{m_e c^2}$$

No referencial do laboratório, existe uma componente devida à distribuição Maxwelliana

$$E_1 \gg E$$



Esquema das perdas sucessivas de energia sofridas por um elétron devido a espalhamento Compton inverso

- Em eq. termodinâmico, a interação entre fótons e elétrons só ocorre via espalhamento, sem troca energética.
- Supomos também que, devido à baixa densidade de fótons, efeitos de emissão estimulada são desprezíveis.
- Fótons seguem uma distribuição de Bose-Einstein...
- Assim, usando a eq. (6.51) do R&L:

$$N(E) = K E^2 e^{-(E/\kappa T)}$$

$$\langle E \rangle = \int E \frac{dN}{dE} dE / \int \frac{dN}{dE} dE = 3\kappa T$$

$$\langle E^2 \rangle = \int E^2 \frac{dN}{dE} dE / \int \frac{dN}{dE} dE = 12(\kappa T)^2$$

Em equilíbrio, $\Delta E = 0$, logo $\alpha = 4$!

$E < 4 \kappa T \Rightarrow$ fótons ganham

energia, gás resfria

$E > 4 \kappa T \Rightarrow$ fótons perdem

energia, gás esquenta

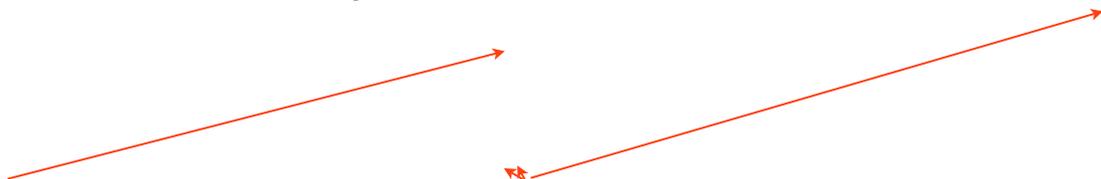
VÁLIDO NO REGIME DE ELÉTRONS NR!!!!

- Definimos a variação total de energia relativa dos elétrons, sofrida ao atravessar um meio quente ($E \ll kT_e$) cuja profundidade óptica é $\tau_e = n_e \sigma_T l$:



- Parâmetro de Comptonização:

$$y_R \equiv 16 \left(\frac{\kappa T}{m_e c^2} \right)^2 \text{Max} (\tau_{es}, \tau_{es}^2)$$



$$N \approx \tau, \tau \ll 1 \quad N \approx \tau^2, \tau \gg 1$$

Varição
relativa

=

Varição
relativa

X

no. médio de

- Espalhamentos sucessivos por

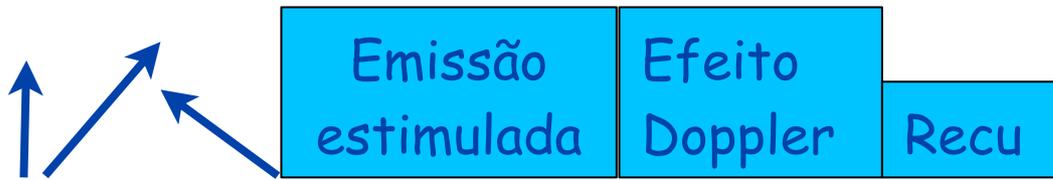
elétrons não-relativísticos e a eq. de Kompaneets

- Eq. de Kompaneets: solução particular da eq. de Boltzmann → eq. de difusão!
- Descreve o movimento de difusão dos fótons no espaço de fase
- Intrinsecamente não relativística

Eq. Kompaneets

- n → no. de ocupação dos fótons
- $x = E / \kappa T$
- Parâmetro de Kompaneets (parâmetro de Comptonização)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left(n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x} \right)$$



$$n = I(E) \frac{hc^2}{8\pi E^3} y = \frac{4\pi T_e}{m_e c^2} \sigma_T N_e c t$$

- O espectro de fótons pode ser obtido analiticamente resolvendo-se a eq. de Kompaneets. Entretanto, só existem soluções analíticas possíveis para casos especiais e geometrias simples. O caso mais comum é o da Comptonização não saturada
- Uma discussão completa com vários exemplos pode ser encontrada em Sunyaev e Tirtachuk (1980)
- Espectro total “genérico”

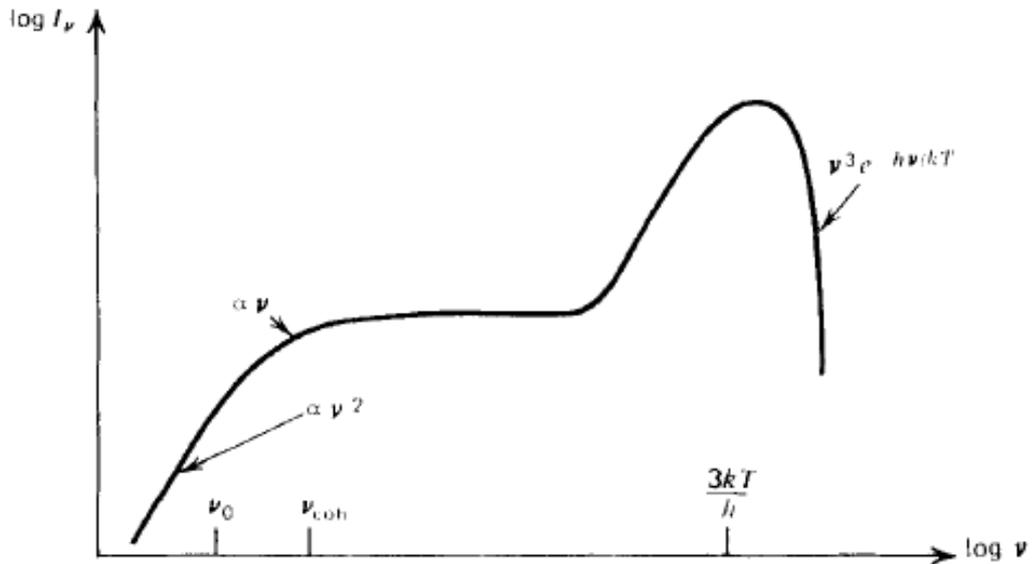


Figure 7.4 Spectrum from a thermal, nonrelativistic medium characterized by free-free emission and absorption and by saturated inverse Compton scattering. At low frequencies the spectrum is blackbody then becomes modified blackbody and, at high frequencies, becomes a Wien spectrum.

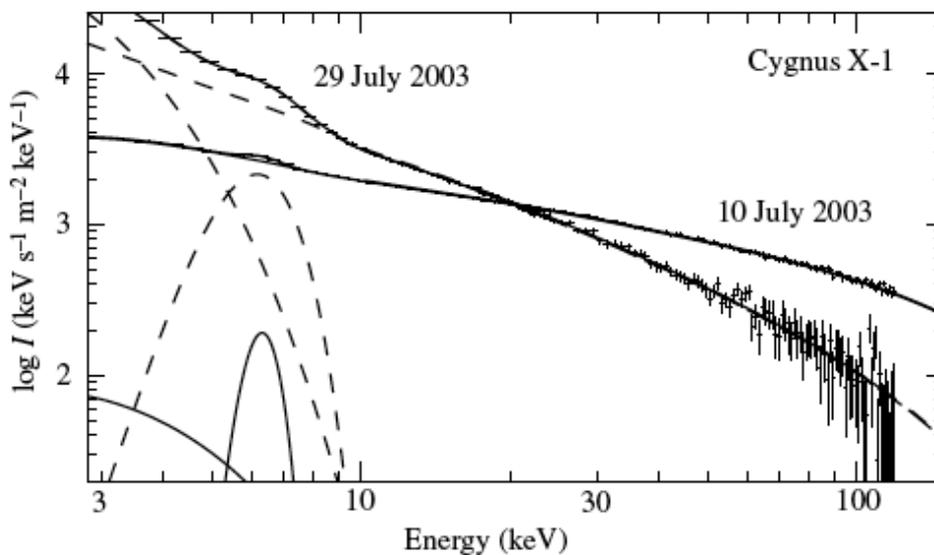


Fig. 9.3: Two x-ray spectra of the black-hole binary Cygnus X-1 on a log-log plot illustrating the extreme variability of the source. In the 29 July 2003 “soft” spectrum, the thermal (modified blackbody) peak is quite pronounced (hump in upper curve), whereas the power-law extending to high energies is much more pronounced in the 10 July 2003 “hard” spectrum. The spectra are modeled with the components shown as dashed (29 July) and solid (10 July) lines. [J. Wilms *et al.*, *A&A* 447, 245 (2006)]

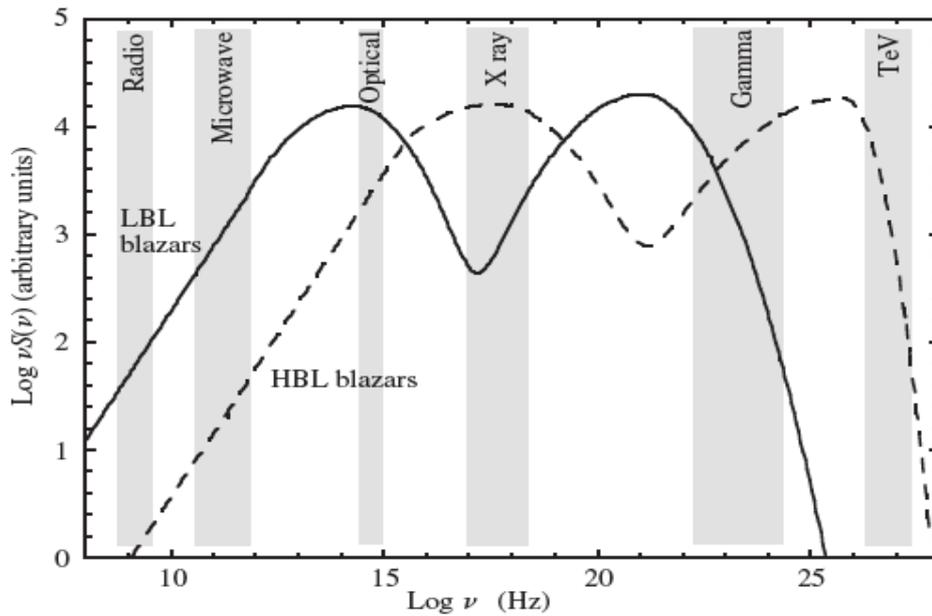
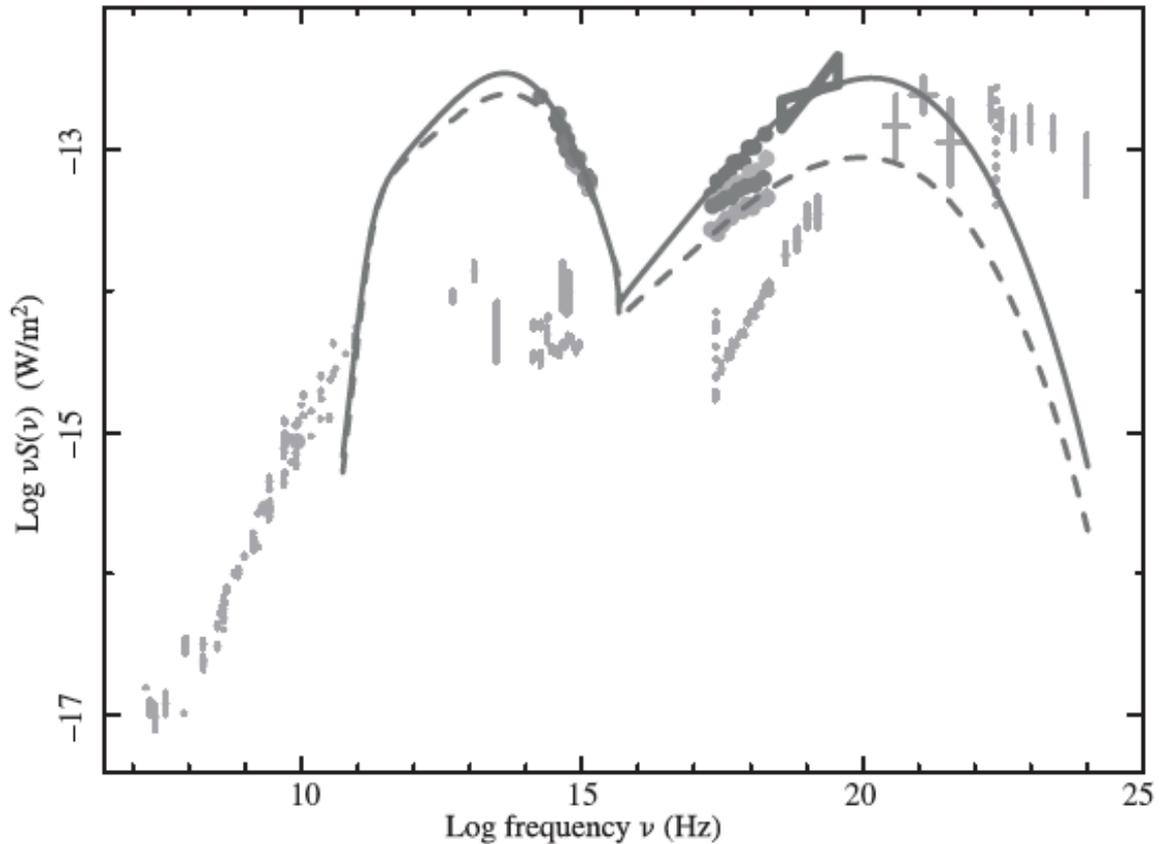
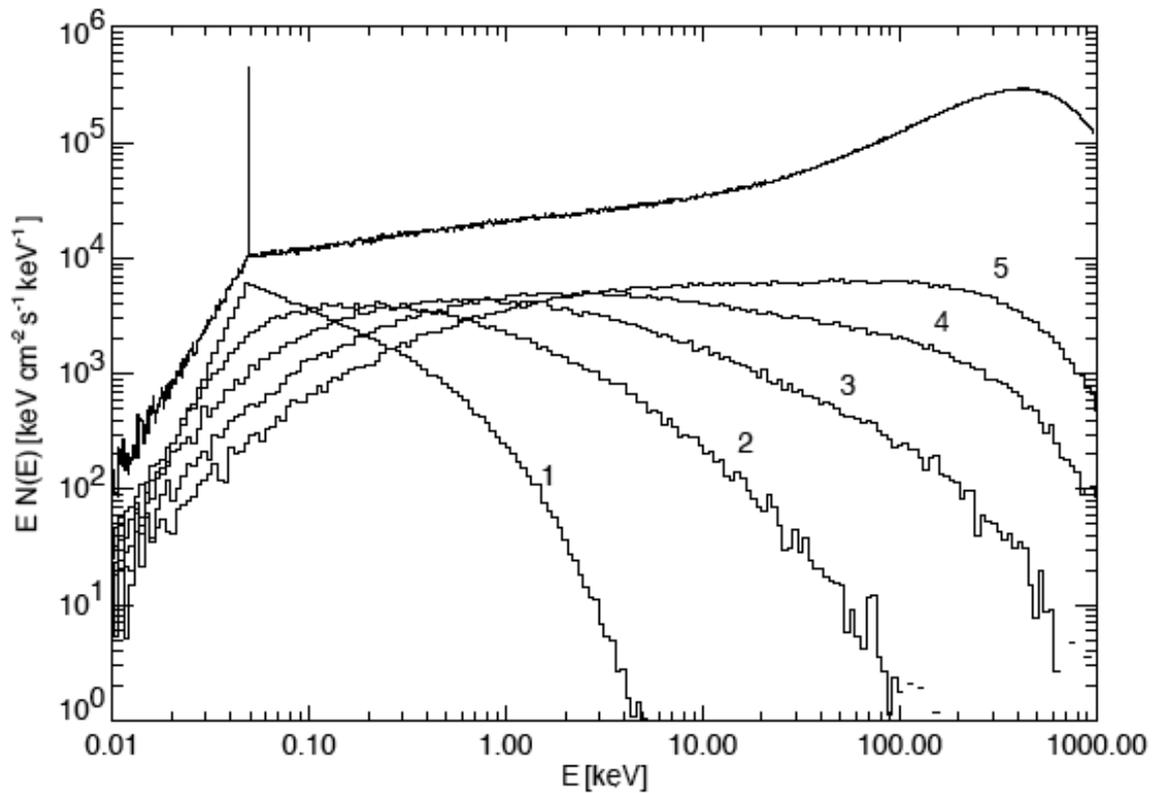
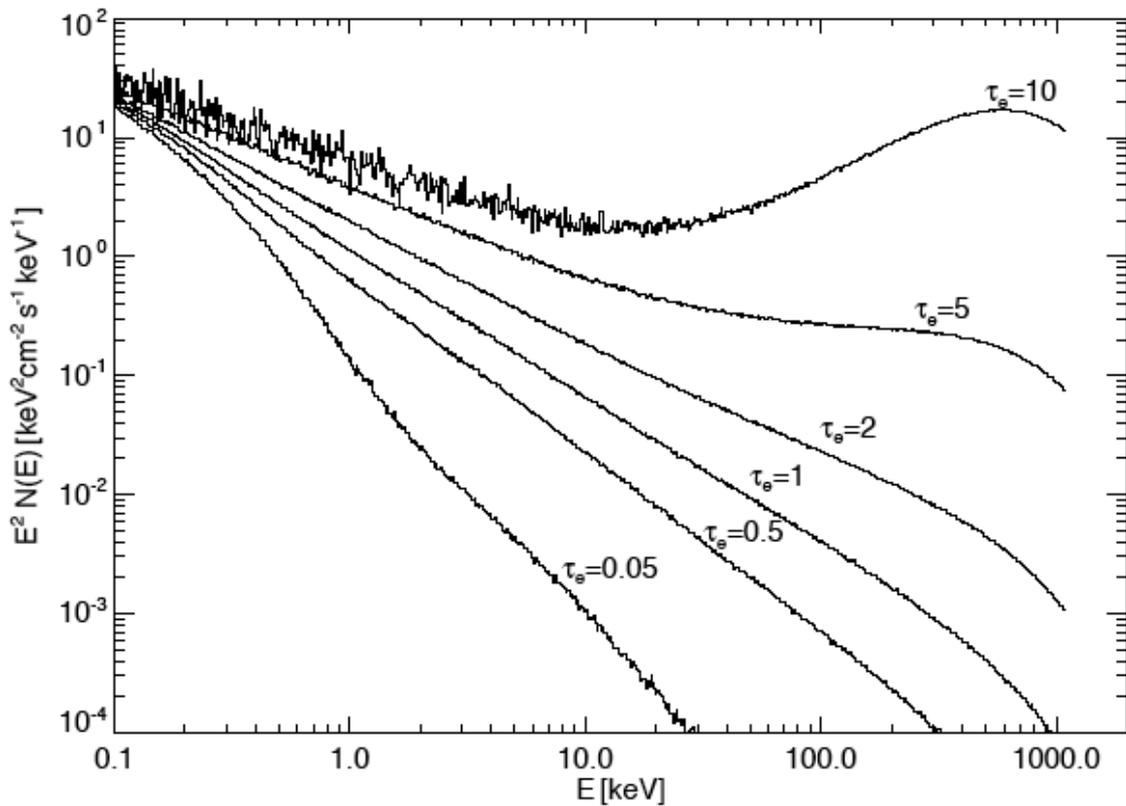


Fig. 9.5: Theoretical spectral energy distributions (SED) for blazars across the broad range of frequencies where observations of blazars are carried out (shaded areas). The two curves exhibit extremes of possible spectra (high and low energy) and illustrate the importance of observations across many wave bands. In the model, the lower frequency peak arises from synchrotron photons, and the higher frequency peak from IC-scattered photons in an SSC source that is hurtling at relativistic speed toward the observer. In an SED plot, a flat spectrum represents constant energy flux per fixed log interval (e.g., a decade of frequency). [P. Giommi *et al.*, *A&A* **445**, 843 (2006); courtesy S. Colafrancesco]





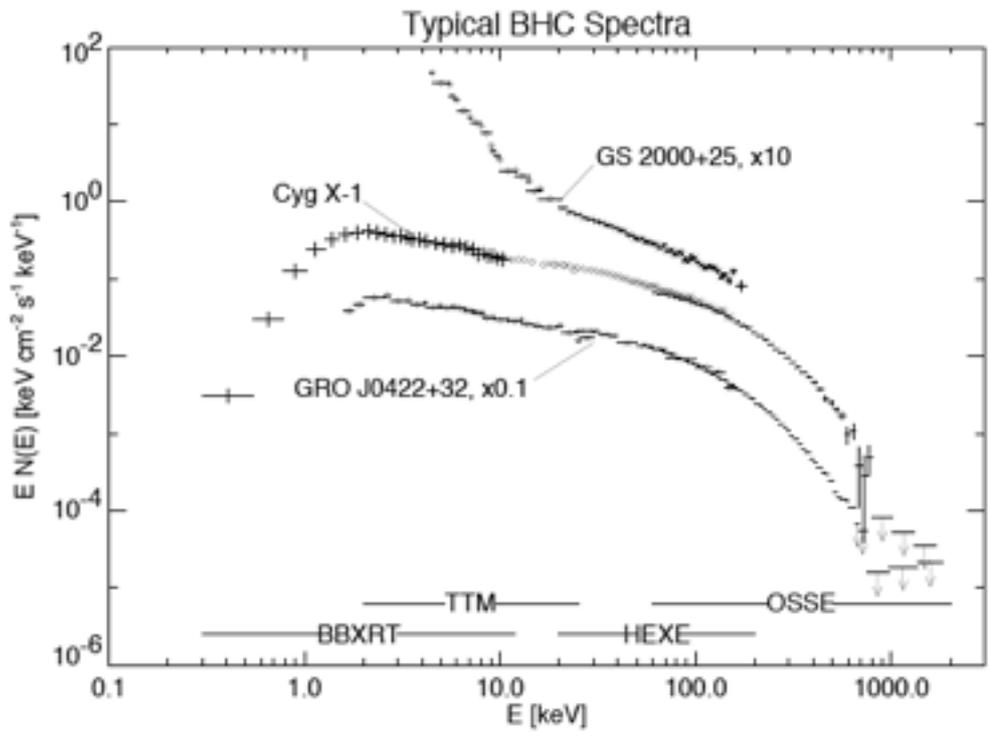
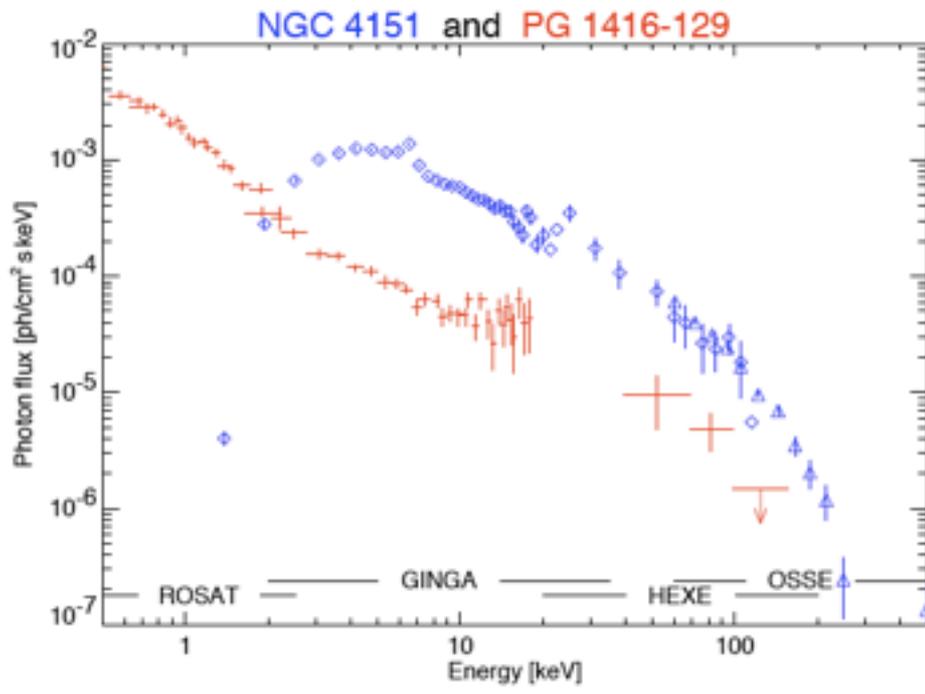
Esfera com $\tau=5$, $kT_e=0,4 m_e c^2$ (~ 200 keV)
 fótons Compton vêm do centro da esfera
 Espectro total é construído a partir dos
 diversos espalhamentos (no. de colisões dos
 fótons Compton antes de deixarem a nuvem)



- $y \ll 1$: pure power-law spectrum.
- $y < 1$: power-law with exp. cut-off.
- $y \gg 1$: “Saturated Comptonization”.

Esfera com $kT_e = 0,7 m_e c^2$ (~ 360 keV)
 Fótons Compton vêm do centro da esfera

**Comptonização saturada nunca
 foi observada!!!**



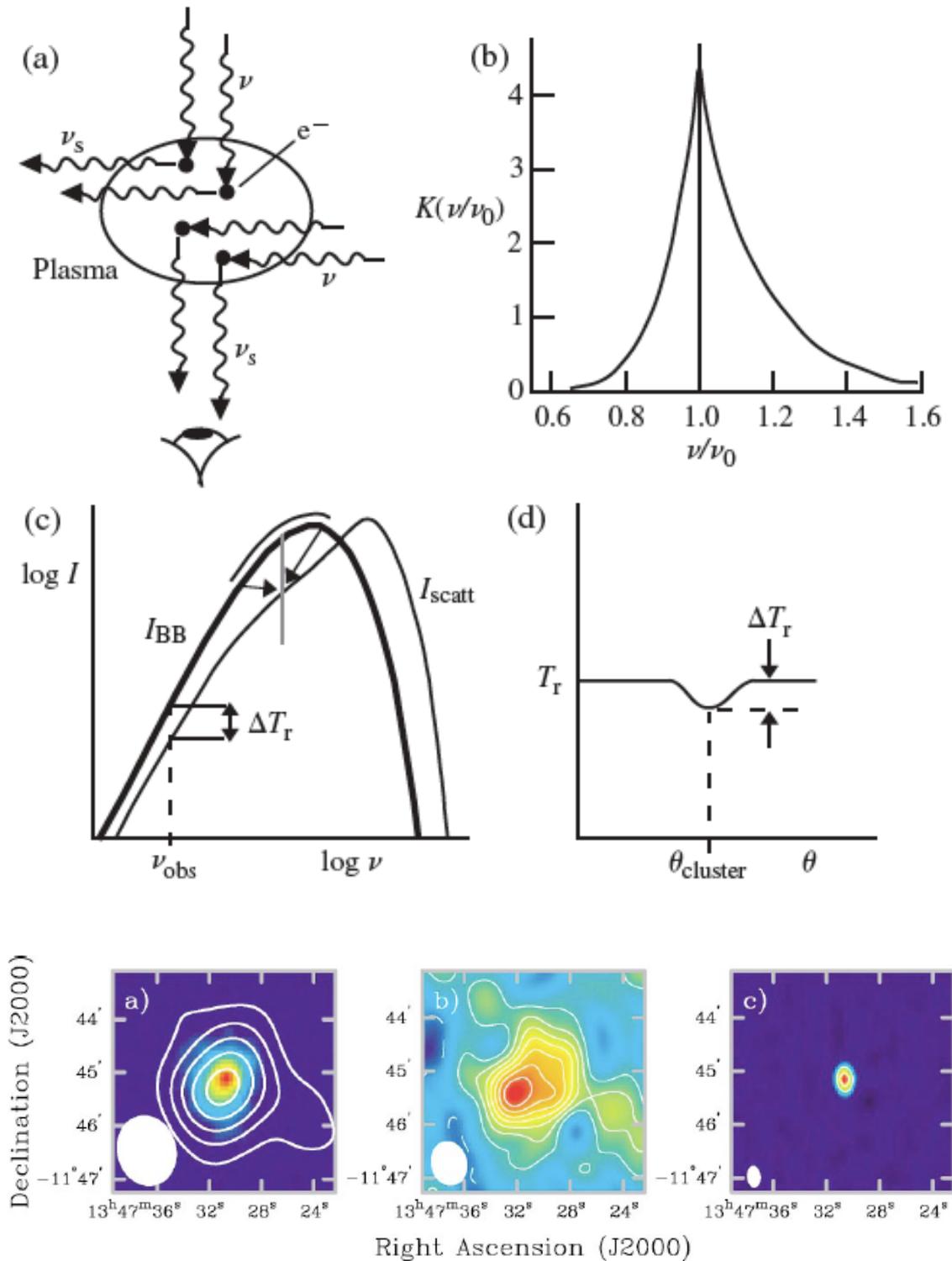


Figure 5 Interferometric images of the SZE of galaxy cluster RXJ 1347-1145, emphasizing different spatial scales. The Full Width Half Maximum (FWHM) ellipse of the synthesized beam is shown in the lower left corner of each panel. (a) Point source—subtracted SZE image (contours) overlaid on ROSAT X-ray image (false color). The contours are multiples of $185 \mu\text{K}$ ($\sim 2\sigma$), and negative contours are shown as solid lines. A 1500λ half-power radius Gaussian taper was applied to the u, ν data, resulting in a $63'' \times 80''$ synthesized beam. The X-ray image is High Resolution Imager (HRI) raw counts smoothed with a Gaussian with $\sigma = 6''$ and contains roughly 4000 cluster counts. (b) Higher-resolution point source—subtracted SZE image (both contours and false color). A 3000λ half-power radius Gaussian taper was applied, resulting in a $40'' \times 50''$ synthesized beam. The contours are multiples of $175 \mu\text{K}$ ($\sim 1\sigma$). (c) Image of the point source made using projected baselines greater than 3000λ . This map has a synthesized beam of $15'' \times 24''$ and $\sigma \sim 275 \mu\text{Jy beam}^{-1}$, corresponding to a $\sim 1200 \mu\text{K}$ brightness sensitivity. The contours are multiples of 15σ . The data was taken with the BIMA mm-array operating at 28.5 GHz. Single-dish maps of the SZE toward RXJ 1347-1145 have also been made with the IRAM 30-m and the Nobeyama 45-m telescopes (Pointecouteau et al. 2001; Komatsu et al. 2001).

7 - Referências bibliográficas

1. G. Ribicky e A. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics* caps. 5, 6 e 7. Wiley (1979).
2. T. Padmanabham. *Theoretical Astrophysics*, cap. 6, seção 6.10 e 6.11. Cambridge (2004)
3. J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*, cap. 14, secs. 14.5 e 14.6. Wiley (1974)
4. M. Longair. *High Energy Astrophysics*: Vol. I (caps. 3 e 4), Vol. II (caps. 17 e 18). Cambridge (1992)
5. H. Bradt. *Astrophysical Processes: the physics of astrophysical phenomena*, caps. 5, 8 e 9. Cambridge (2008)
6. G. Blumenthal e R. Gould. *Bremsstrahlung, Synchrotron Radiation, and Compton Scattering of High Energy Electrons Traversing Dilute Gases*. *Review of Modern Physics*, 42(2), 237-270 (1970)
7. V. Ginzburg e S. Syrovatskii. *Cosmic Magnetobremsstrahlung (synchrotron radiation)*. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 297-350 (1965)
8. I. Novikov e K. Thorne. *Astrophysics of Black Holes*. In: *Black holes (Les astres occlus)*, p. 343 - 450, 1973, (1973)