Teoria Básica dos Campos de Radiação

Carlos Alexandre Wuensche

Processos Radiativos I

Introdução

- Problemas dependentes do tempo mostram a dependência clara de fenômenos elétricos e magnéticos - ELETROMAGNETISMO e não ELETRICIDADE e MAGNETISMO
- Campos variando no tempo dão origem a outros campos, assim como o deslocamento de cargas...
- Trataremos, por hora, do caso não-relativístico.

Introdução

- Uma partícula em movimento num campo eletromagnético deve sofrer uma força produzida por ambos os campos, a chamada Força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{v}{c}\vec{v} \times \vec{B})$$

- Podemos deduzir diretamente uma relação de balanço entre a energia potencial elétrica e a energia cinética da carga em movimento:

$$\vec{v}.\vec{F} = q\vec{v}.\vec{E}$$

$$q\vec{v}.\vec{E} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)$$

- A generalização da eq. de Lorentz para uma distribuição contínua de cargas em movimento fica:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{v}{c}\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\rho = lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i q_i$$

$$\vec{j} = lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i q_i v_i$$

- sendo que os volumes devem ser menor do que o volume total do espaço em que os campos estão sendo medidos, mas muito maior do que o volume ocupado por uma única partícula

Eqs. de Maxwell (vácuo e meio material)

$$\nabla \bullet \vec{E} = 4\pi\rho_e \qquad \nabla \bullet \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = 4\pi\rho_e \qquad \nabla \bullet \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

Algumas consequências...

- Conservação de carga $\nabla \bullet \vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- Determinamos a densidade de energia e fluxo para o campo eletromagnético usando a lei de Ampére e a definição de trabalho por unidade de volume numa distribuição de cargas para chegar no teorema de Poynting
- $$\vec{j} \bullet \vec{E} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}[\epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu}] = -\nabla \bullet (\frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B})$$

Energia do campo **Vetor de Poynting**

Ondas Eletromagnéticas Planas

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad \nabla \bullet \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

- A partir destas equações, deduzimos as equações de onda para os campos elétrico e magnético

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

- A simetria entre as eqs. de onda vem da invariância das Eqs. de Maxwell para as transformaçoes **E** $\rightarrow$ **B** e **B** $\rightarrow$ - **E** acima

Solução das eqs. de onda

$$\vec{E} = \hat{a}_1 E_0 e^{i(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{B} = \hat{a}_2 B_0 e^{i(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t)}$$

- Essas soluções são gerais e representam ondas planas viajando na direção **n** e, superpondo essas soluções se propagando em todas as direções do espaço podemos construir a solução mais geral para as equações de Maxwell no vácuo (sem fontes).
- A substituição dessas soluções nas eqs. de Maxwell nos dá:
- $$\begin{aligned} i\vec{k} \bullet \hat{a}_1 E_0 &= 0 \qquad i\vec{k} \bullet \hat{a}_2 B_0 = 0 \\ i\vec{k} \times \hat{a}_1 E_0 &= \frac{i\omega}{c} \hat{a}_2 B_0 \qquad i\vec{k} \times \hat{a}_2 B_0 = -\frac{i\omega}{c} \hat{a}_1 E_0 \end{aligned}$$

A propagação da onda

- $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são perpendiculares à direção de propagação
- $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{k}$ formam uma tríade "horária" de vetores mutuamente perpendiculares perpendiculares à direção de propagação.
- $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ definem o plano de oscilação da onda EM.
- Relacionamos E_0 e B_0 através das expressões:

$$E_0 = \frac{\omega}{\kappa c} B_0 \qquad B_0 = \frac{\omega}{\kappa c} E_0$$

$$E_0 = \frac{\omega}{\kappa c}^2 E_0 \qquad \omega^2 = \kappa^2 c^2$$

Velocidade de fase:

$$v_{fase} = \frac{\omega}{\kappa}$$

$$v_{grupo} = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa}$$

Velocidade de grupo:

- Essas relações implicam que a amplitude dos campos E e B é a mesma!

O Espectro de Radiação

- Depende da variação temporal de E.
- Não existe um espectro "instantâneo", sendo necessário medir um trem de ondas ou a radiação de um único ponto durante um intervalo de tempo suficientemente longo para caracterizar um espectro.
- Dado um tempo Δt, só podemos resolver o espectro em frequências $\Delta \omega$ tal que $\Delta t \Delta \omega > 1$!
- Considerando a radiação na forma de um pulso finito (para o campo elétrico, já que o magnético se comporta da mesma forma), podemos representar E (t) na forma de um "par de Fourier".

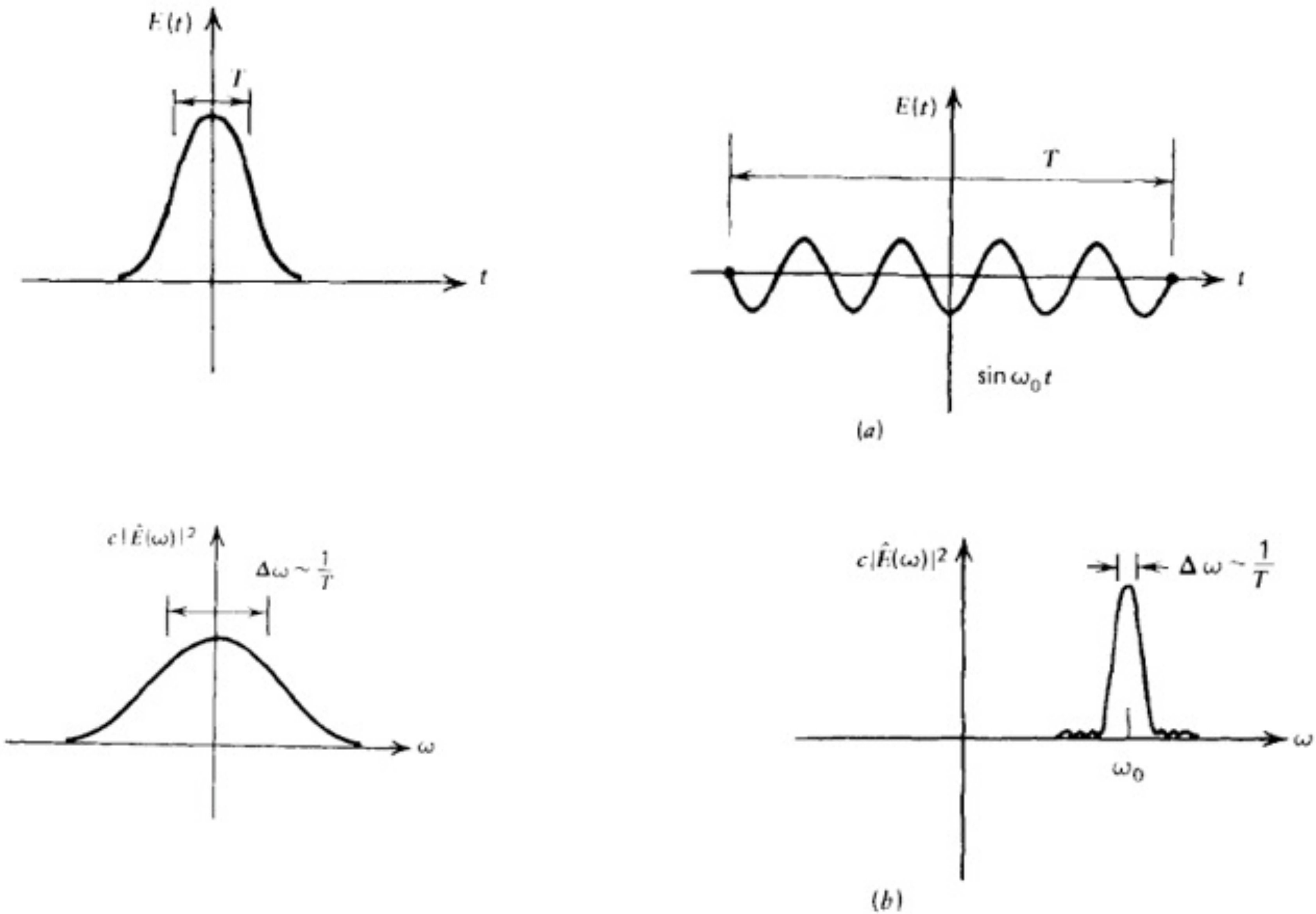
10

$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)e^{i\omega t}dt$$
$$E(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

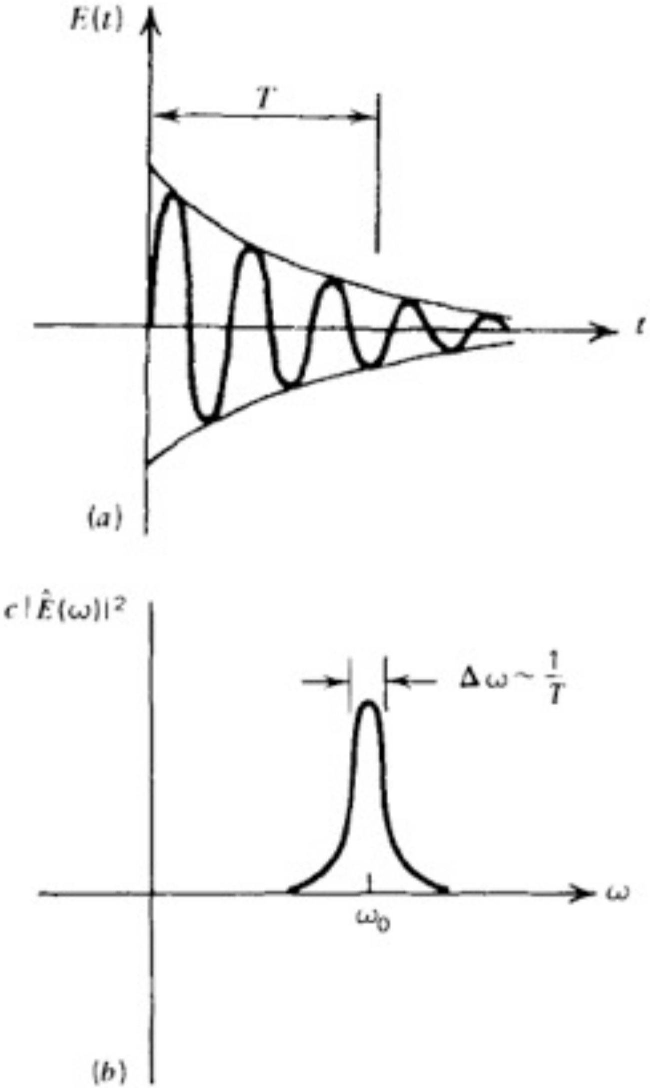
- E(ω) contém toda a informação de frequência de E(t)!
- A energia carregada por essa onda pode ser expressa em termos do vetor de Poynting:

$$\frac{dW}{dAdt} = \frac{c}{4\pi}E^2(t)$$

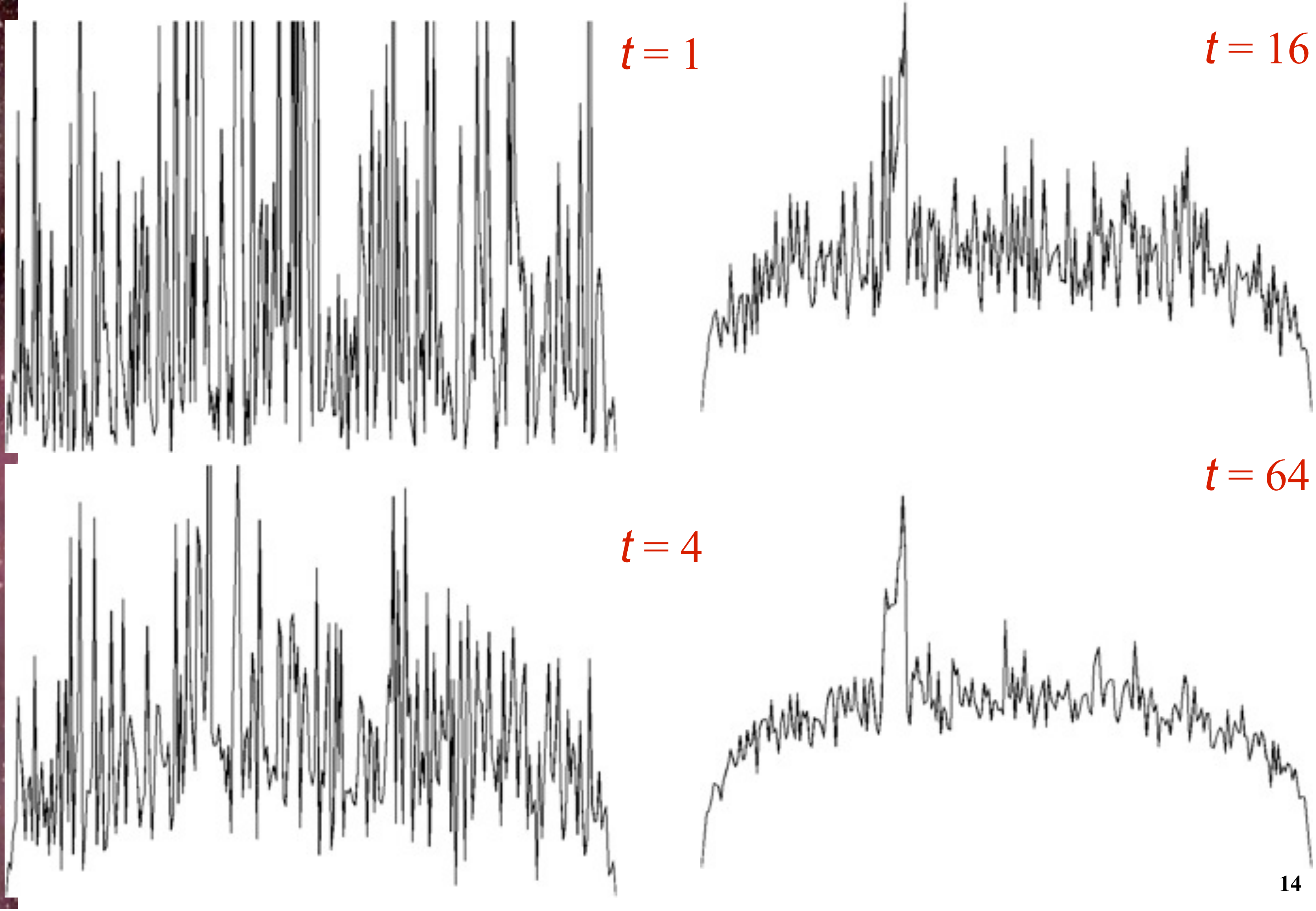
- **E pode-se mostrar que essa expressão é equivalente, usando o teorema de Parseval, a** $$\frac{dW}{dAd\omega} = c\hat{E}^2(\omega)$$


$E(t)$
T
t
$E(t)$
T
t
$\sin \omega_0 t$
(a)
$c|\hat{E}(\omega)|^2$
$\Delta\omega \sim \frac{1}{T}$
ω
$c|\hat{E}(\omega)|^2$
$\Delta\omega \sim \frac{1}{T}$
ω
ω_0
(b)

12


E(t)
T
t
(a)
c|Ê(ω)|²
Δω ~ 1/T
ω
ω0
(b)

Obtendo a média do espectro de potência



14