# Emissão sincrotron

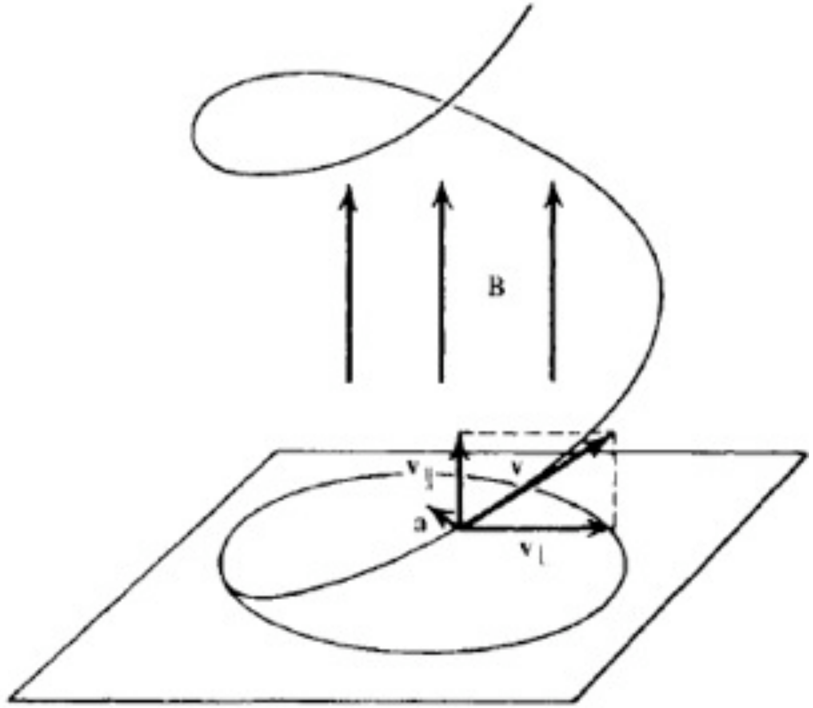
Carlos Alexandre Wuensche

Processos Radiativos I

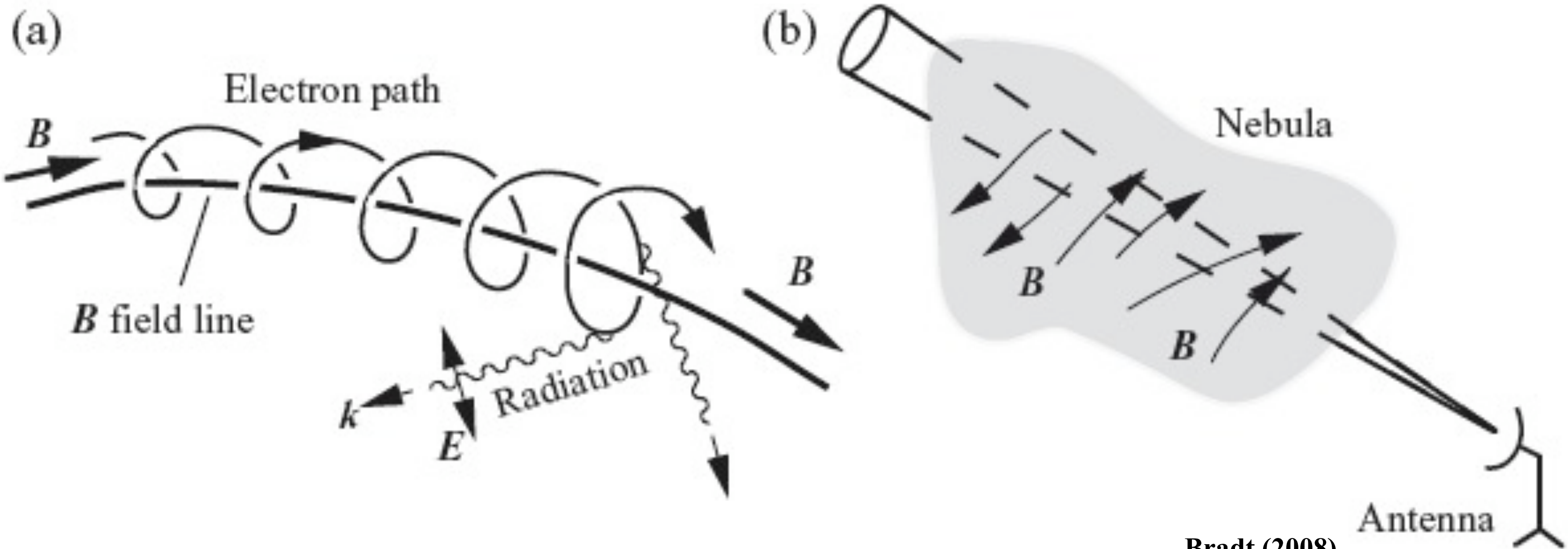
Última revisão: Abril de 2010

# Algumas referências para esse capítulo...

- Theoretical Astrophysics (T. Padmanabham), cap. 6, seção 6.10 e 6.11
- Classical Electrodynamics (J. D. Jackson), cap. 14, secs. 14.5 e 14.6
- High Energy Astrophysics - Vol. II (M. Longair), cap 18.
- Bremsstrahlung, Synchrotron Radiation, and Compton Scattering of High Energy Electrons Traversing Dilute Gases (G. Blumenthal e R. Gould), Review of Modern Physics, 42(2), 237-270 (1970)
- Cosmic Magnetobremsstrahlung (synchrotron radiation) (V. Ginzburg e S. Syrovatskii), Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 297-350 (1965)



B
v
v∥
a
v⊥

(a)
Electron path
B
B field line
B
k
E
Radiation
(b)
Nebula
B
B
Antenna


Bradt (2008)

# Introdução

- Partículas aceleradas por um campo magnético emitem radiação.
  - Ciclotron: caso não relativístico (frequência proporcional a B)
  - Sincrotron: caso relativístico (amplificado pelo fator $\gamma$, frequência característica muito maior que frequência de giro)
- Termo antigo: "bremsstrahlung magnético"
- Cálculo da potência emitidano referencial do $e^-$ é mais simples; transformação para o referencial em repouso é amplificada por $(eB)^2$

# Introdução

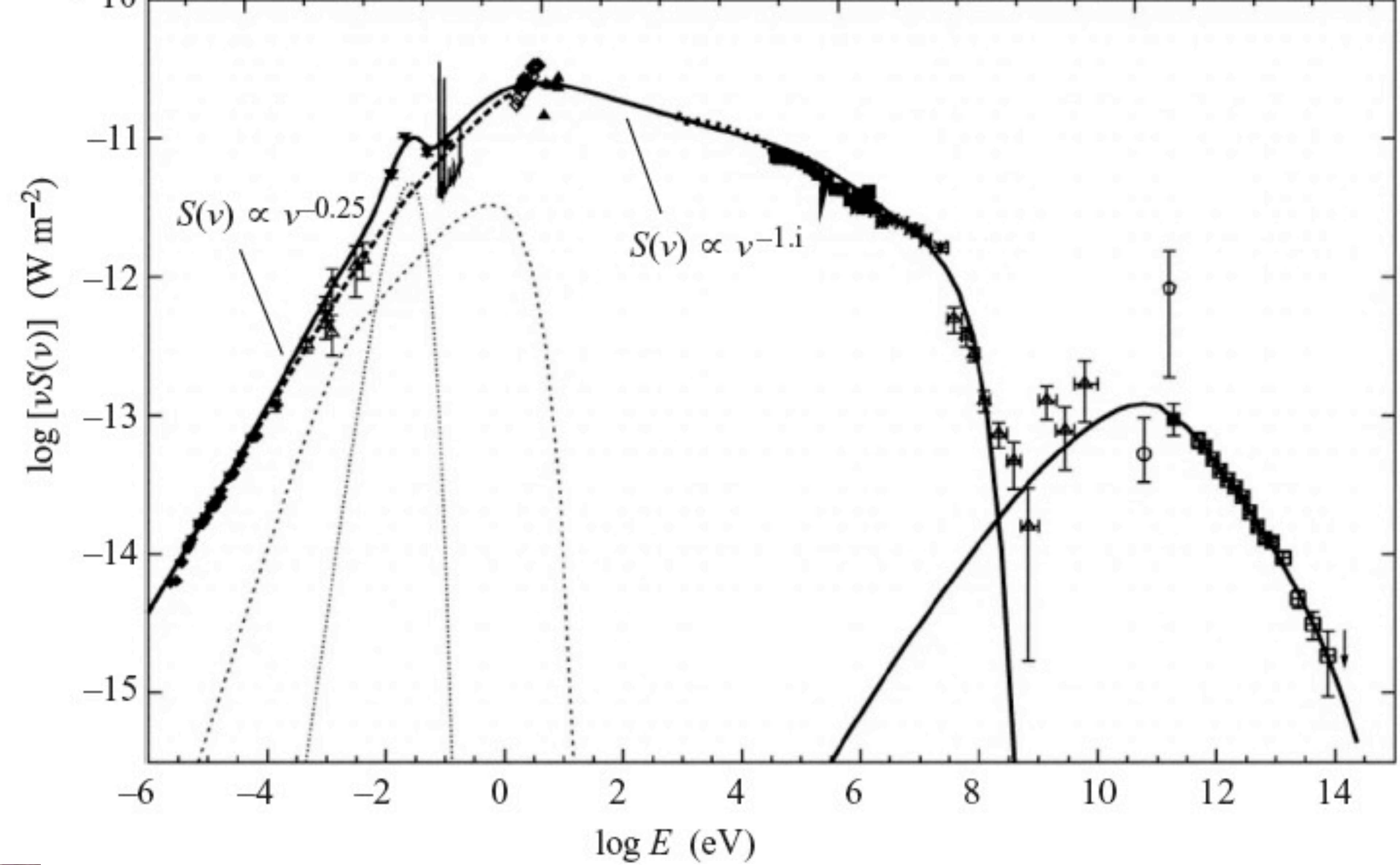
- Ensemble de $e^-$ emitindo radiação em forma de lei de potência decrescente é uma situação comum em astrofísica
- Esse tipo de espectro é chamado "não-térmico", em contraste com a lei de potência "térmica" crescente da curva de corpo negro, na região de Rayleigh-Jeans.
- Radiação de curvatura: emissão sincrotron alterada pela curvatura do campo magnético (p. ex., em estrelas de nêutrons).
- Emissão em fase produzida por um grupo de elétrons gera uma radiação coerente (da ordem de $N^2$ para N $e^-$)

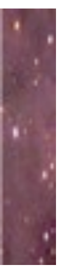
# Introdução

- A intensidade específica e o espectro de emissão dependem da densidade eletrônica e da intensidade do campo magnético, e ambos decrescem com a frequência (lei de potência “descendente”)
- O espectro não-térmico é esperado, nesse caso, porque os $e^-$ que produzem a radiação não se encontram em equilíbrio térmico com a vizinhança (muito energéticos e baixa densidade numérica)
- Observado da faixa de rádio até raios X. Objeto clássico em que a emissão aparece em diversos comprimentos é o pulsar do Caranguejo (Crab)

# Observações

- Situação de interesse astrofísico: campo magnético num plasma, não no vácuo (elétrons com grande velocidade e baixa densidade numérica)
- A maioria dos casos de emissão contínua em astrofísica é sincrotron!
- Casos típicos
  - Emissão solar (rádio e óptico)
  - Emissão em rádio na Galáxia (disco e halo)
  - Emissão em rádio de envelopes de supernovas
  - Emissão em rádio de galáxias ativas
  - Emissão em raios X de quasares
  - Processo dominante em astrofísica de altas energias
- Em geral a emissão é POLARIZADA!


$S(\nu) \propto \nu^{-0.25}$
$S(\nu) \propto \nu^{-1.1}$
$\log[\nu S(\nu)]$ (W m$^{-2}$)
$\log E$ (eV)
−11
−12
−13
−14
−15
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
14



**Bradt (2008)**

# Abordagem básica

- Vamos derivar o caso relativístico e reduzi-lo ao caso não relativístico posteriormente. Partindo da força de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\omega = \frac{cqB}{E_{part}} = \frac{qb}{mc}\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{qB}{mc\gamma}$$

- Em que E é a energia da partícula ( $=\gamma mc^2$).
- Se B $\perp$ v, teremos o movimento confinado a um plano. Se v.B ≠ 0, teremos uma componente paralela e a partícula realizará um movimento helicoidal, superpondo $v_{//}$ e $v_{\perp}$

# A potência emitida

- Da expressão para a potência relativística, temos

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4[a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2]$$

- Casos particulares:
  - $a_{//}=0$, temos o movimento confinado a um plano
  - $a_{\perp}=\omega v_{\perp}$, de modo que:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4 \frac{q^2 B^2}{\gamma^2 m^2 c^2} v_{\perp}^2$$

**$r_0=q^2/mc$**
**$\beta_{\perp}=v_{\perp}/c$**
**$U_{mag}=B^2/8\pi$**
**$v_{\perp}=v\,\mathrm{sen}\alpha$**

- $\alpha$ é o ângulo entre B e a direção do movimento da partícula (**pitch angle**). Integrando $\beta$ sobre todos os ângulos sólidos teremos $\langle\beta_{\perp}^2\rangle = 2\beta^2/3$

# Potência emitida

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4r_0^2}{9}\gamma^2\beta_\perp^2 B^2$$
$$\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3}c\sigma_T\gamma^2\beta_\perp^2 U_B^2$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}r_0^2$$

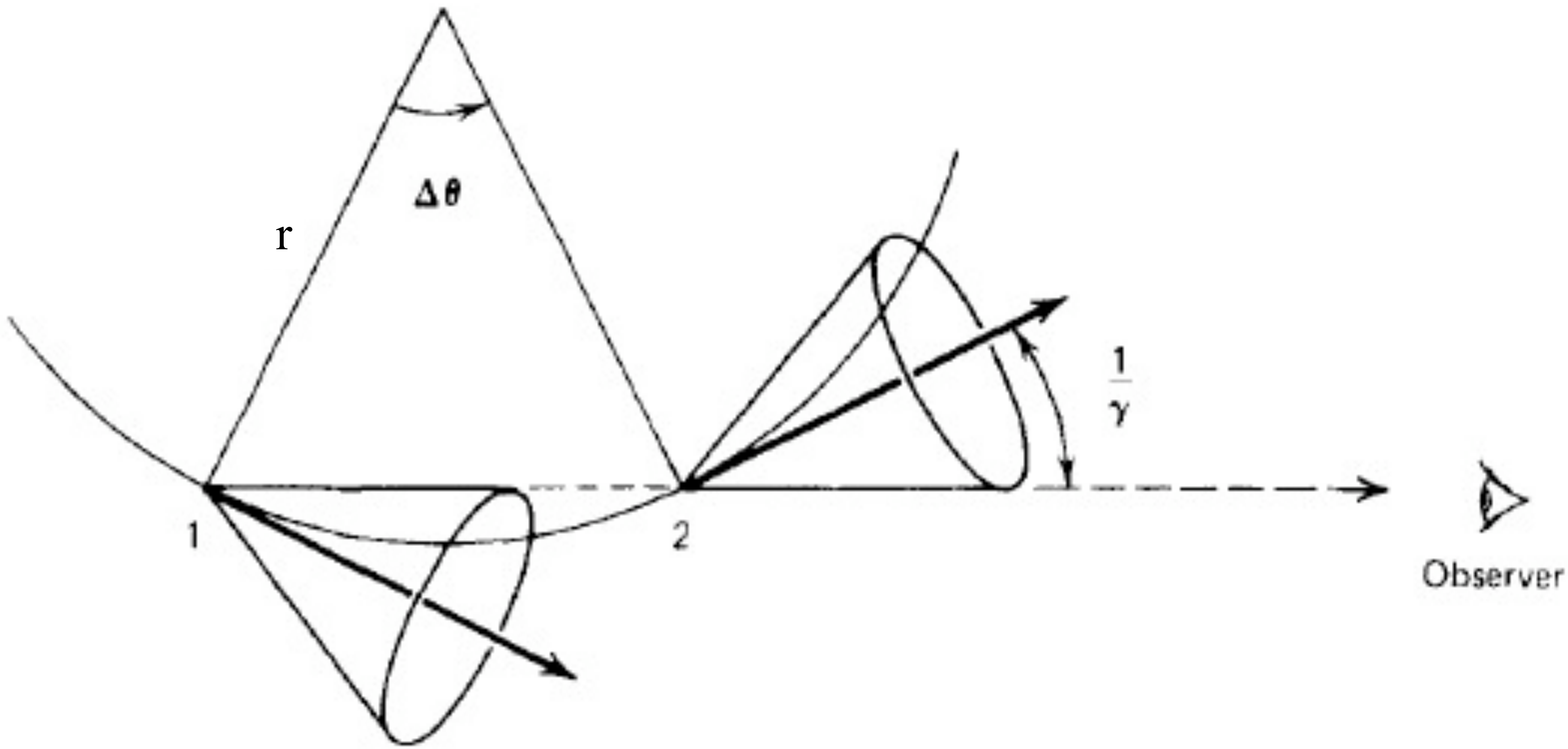
- A escala de tempo para perdas de energia por emissão sincrotron pode ser obtida dividindo a energia do elétron ($\gamma mc^2$) por dE/dt:
  - $t_{sinc} \sim 5 \times 10^8 / (\gamma B) \sim 10^{10} (B/10^{-6}\ G)^{-2} (E/GeV)^{-1}$ anos para $\beta \sim 1$
- A radiação emitida vai ser colimada num cone cuja abertura $\theta \sim 1/\gamma$

# Implicações da emissão relativística

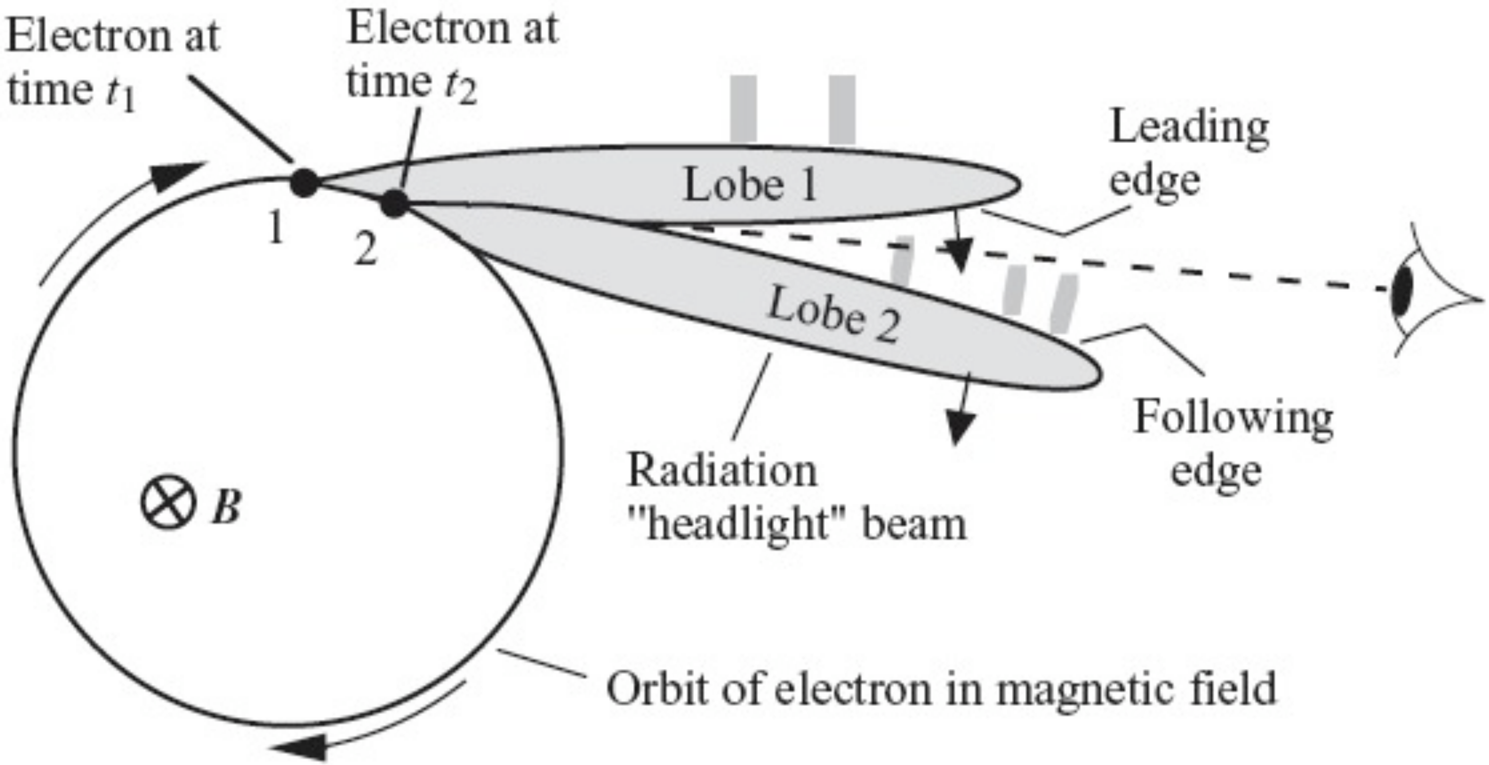
- Um observador somente verá a radiação se estiver na linha de visada do ângulo sólido de abertura $\Delta\theta$
- O campo elétrico no ponto de observação, em qualquer instante, é função de $\gamma\theta$.
- Relacionamos o tempo de chegada da radiação (t) com $\theta$ usando considerações geométricas (Fig. 6.2 R&L).
- A distância $\Delta s$ percorrida pelo $e^-$ ao longo da trajetória circular em torno de B é $\Delta s = r\Delta\theta$ e $\Delta\theta = 1/\gamma \rightarrow \Delta s = 2r/\gamma$.

# Implicações da emissão relativística

- Mas o raio de curvatura r é calculado a partir da eq. de movimento!
- Como $|\Delta \mathbf{v}| = v\Delta\theta$, $\Delta s = v\Delta t$, v e $\Delta s/\Delta\theta = (1/v^2)|\Delta \mathbf{v}|/\Delta t$, temos que $\Delta s/\Delta\theta = \gamma v m c/v^2(qB \mathrm{sen}\alpha) = \omega_B \mathrm{sen}\alpha/v$
- Levando em conta o atraso da emissão entre os pontos 1 e 2 na Fig 6.2, $\Delta t_{obs} \sim \Delta t - r\Delta\theta/c$. Mas $\Delta t = r\Delta\theta/v$, logo $\Delta t_{obs} = r\Delta\theta/v(1 - v/c)$!
- Como $\gamma \gg 1$, podemos escrever $(1 - v/c) \sim 1/2\gamma^2$
- Assim, a dependência $\gamma\theta$ pode ser escrita como:
- $\gamma\Delta\theta = \gamma v\ (1 - v/c)\ \Delta t_{obs}/r = 2\gamma^3\ \Delta t_{obs}\ \omega_B \mathrm{sen}\alpha$




R&L (1979)

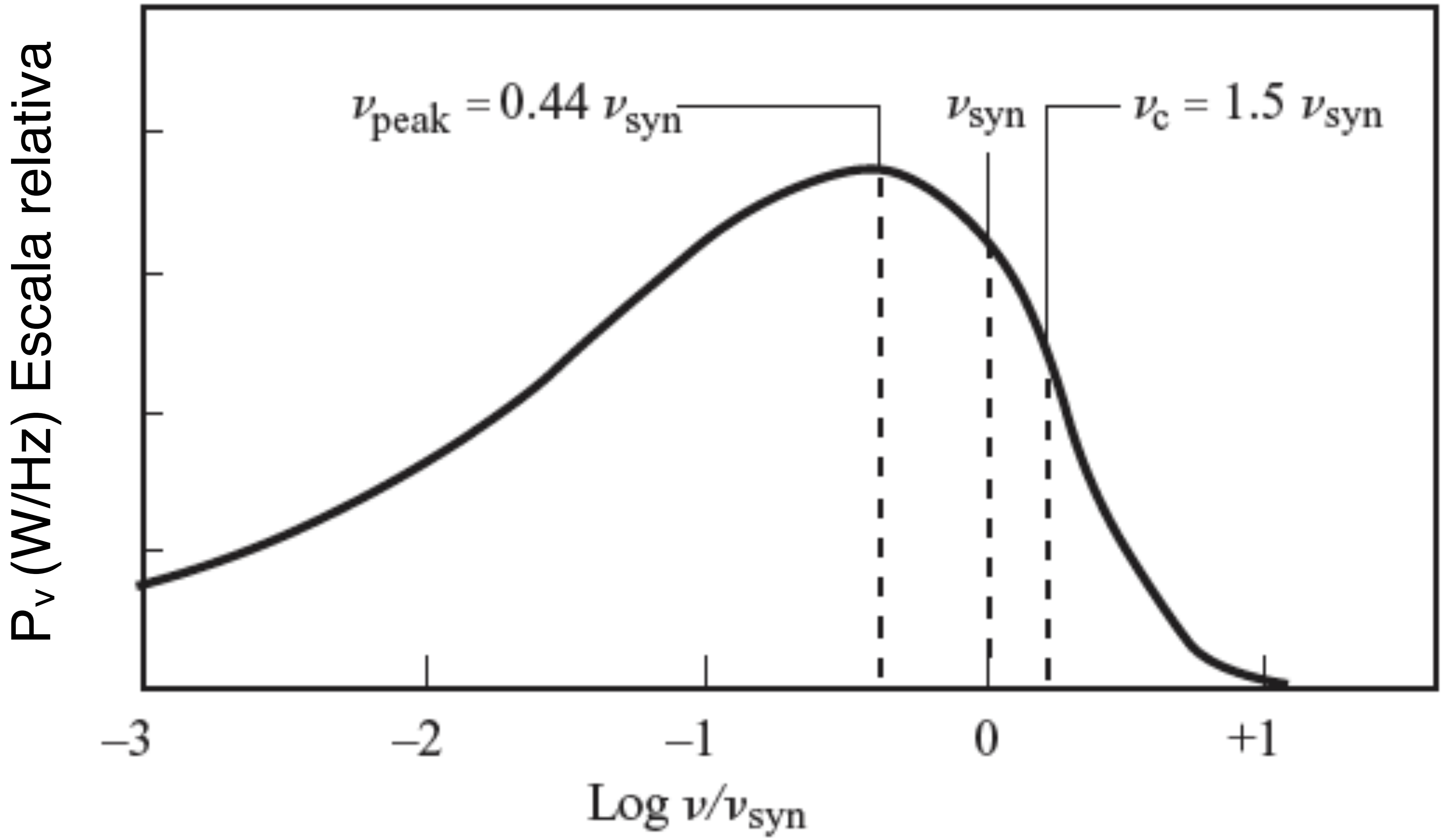

Electron at time $t_1$
Electron at time $t_2$
Lobe 1
Leading edge
1
2
Lobe 2
Following edge
Radiation "headlight" beam
B
Orbit of electron in magnetic field

Bradt (2008)

- Definimos uma frequência de corte (ou frequência crítica), tal que:

$$\begin{aligned}\omega_c &= \frac{3}{2}(\frac{qBsen\alpha}{mc})\gamma^2 \\ &= \frac{3}{2}\gamma^3\ \omega_B sen\alpha \\ &= \approx 10^2\ \mathrm{MHz}(\frac{B}{10^{-6}\ \mathrm{G}})(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{GeV}})^2\end{aligned}$$

- Assim, $\gamma\Delta\theta = 2\gamma^3\ \Delta t_{obs}\, \omega_B sen\alpha = 4/3\ \omega_C\ \Delta t_{obs}$
- Com esse resultado, o par de Fourier $E(\omega)$ pode ser expresso com a dependência $(\omega/\omega_c)$!!! Assim, a energia irradiada por período orbital $(dE/d\omega)(1/T) \equiv dE/d\omega dt$ será uma função de $(\omega/\omega_c)$



$P_\nu$ (W/Hz) Escala relativa
$\nu_{peak} = 0.44\ \nu_{syn}$
$\nu_{syn}$
$\nu_c = 1.5\ \nu_{syn}$
–3
–2
–1
0
+1
Log $\nu/\nu_{syn}$



17

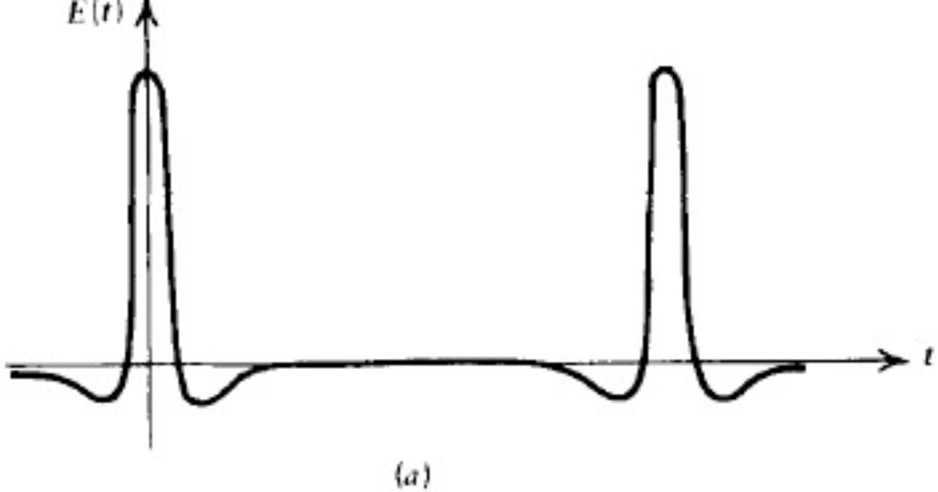



***Figure 6.10a*** ***Time dependence of electric field from a rapidly moving particle in a magnetic field (synchrotron radiation).***

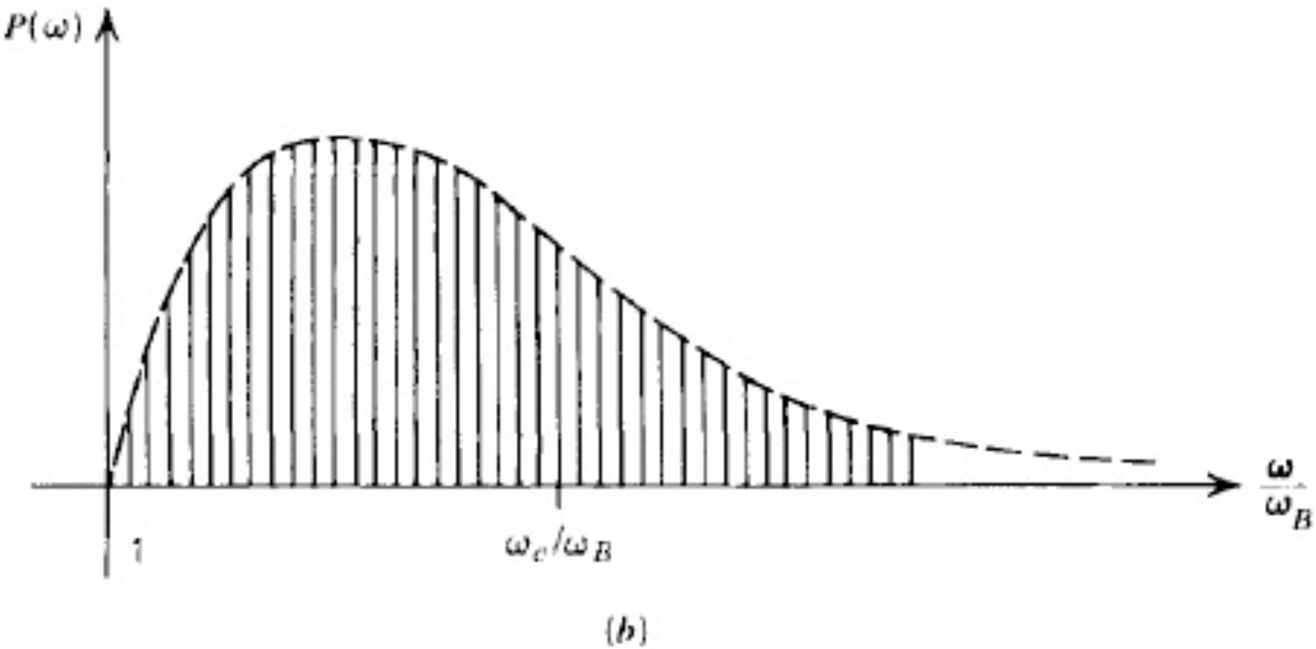
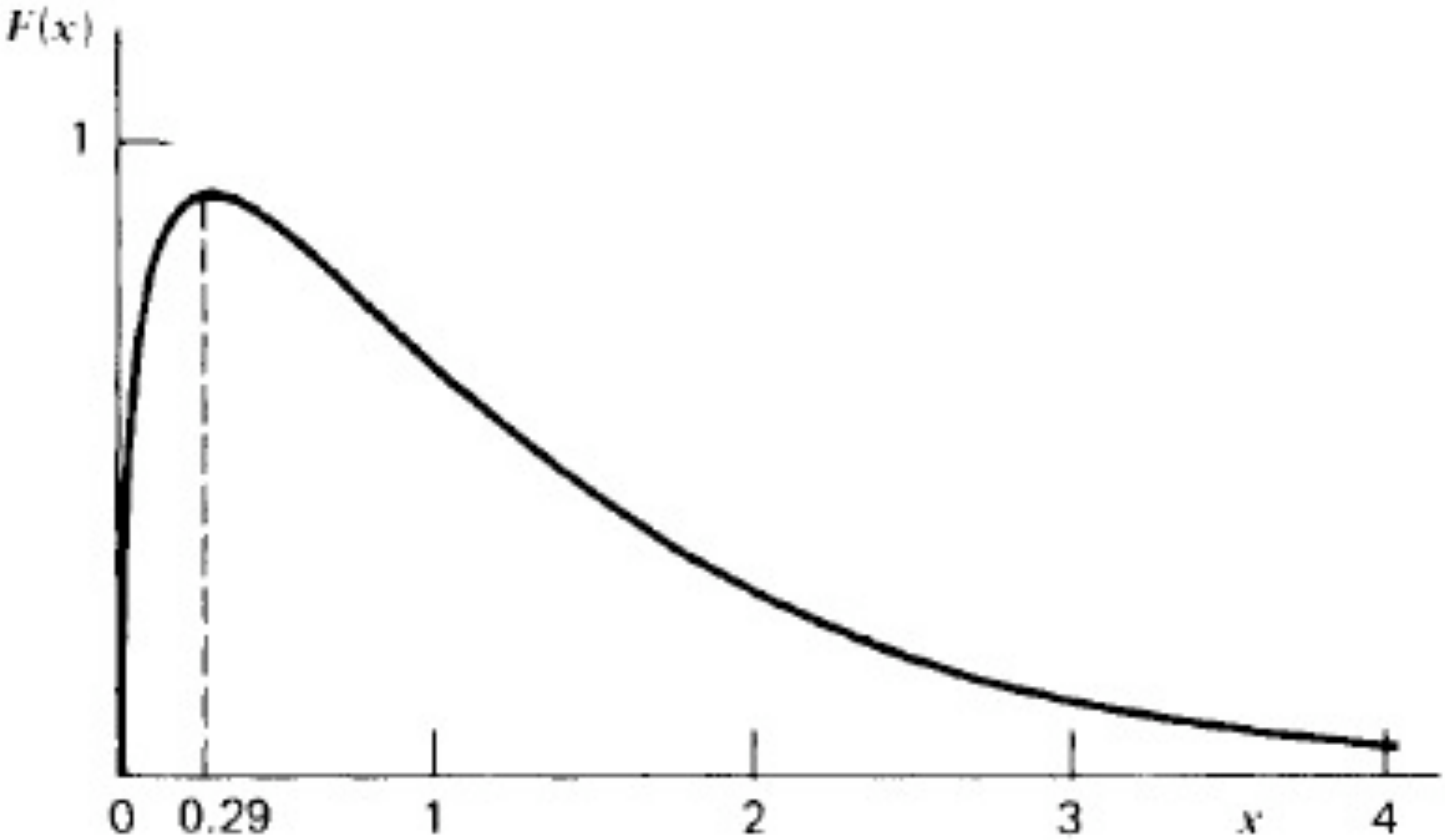



***Figure 6.10b*** ***Power spectrum for a.***




R&L (1979)

# Potência emitida por um $e^-$

- Sabendo que $(dE/d\omega)(1/T) \equiv dE/d\omega dt$ será uma função de $(\omega/\omega_c)$, podemos escrever, de uma forma geral, que $dE/d\omega dt = P(\omega) = C_1\, F\,(\omega/\omega_c)$. Assim:

$$P = \int_0^\infty P(\omega) d\omega = C_1 \int_0^\infty F(\frac{\omega}{\omega_c}) d\omega = \omega_c C_1 \int_0^\infty F(x) dx$$

$$\frac{dE}{dt} = P = \frac{2q^4 B^2 \gamma^2 \beta^2 sen^2 \alpha}{3m^2 c^3}$$

$$\omega_c = \frac{3\gamma^2 q B sen\alpha}{2mc}$$

Já definidos anteriomente

# Potência emitida por um e⁻

A potência emitida por um único elétron fica, então:

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^\infty \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{q^3 B\beta^2 sen\alpha}{mc^2} F(\frac{\omega}{\omega_c})d\omega \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{q^3 B\beta^2 sen\alpha}{mc^2} \int_0^\infty F(\frac{\omega}{\omega_c})d\omega
\end{aligned}
$$

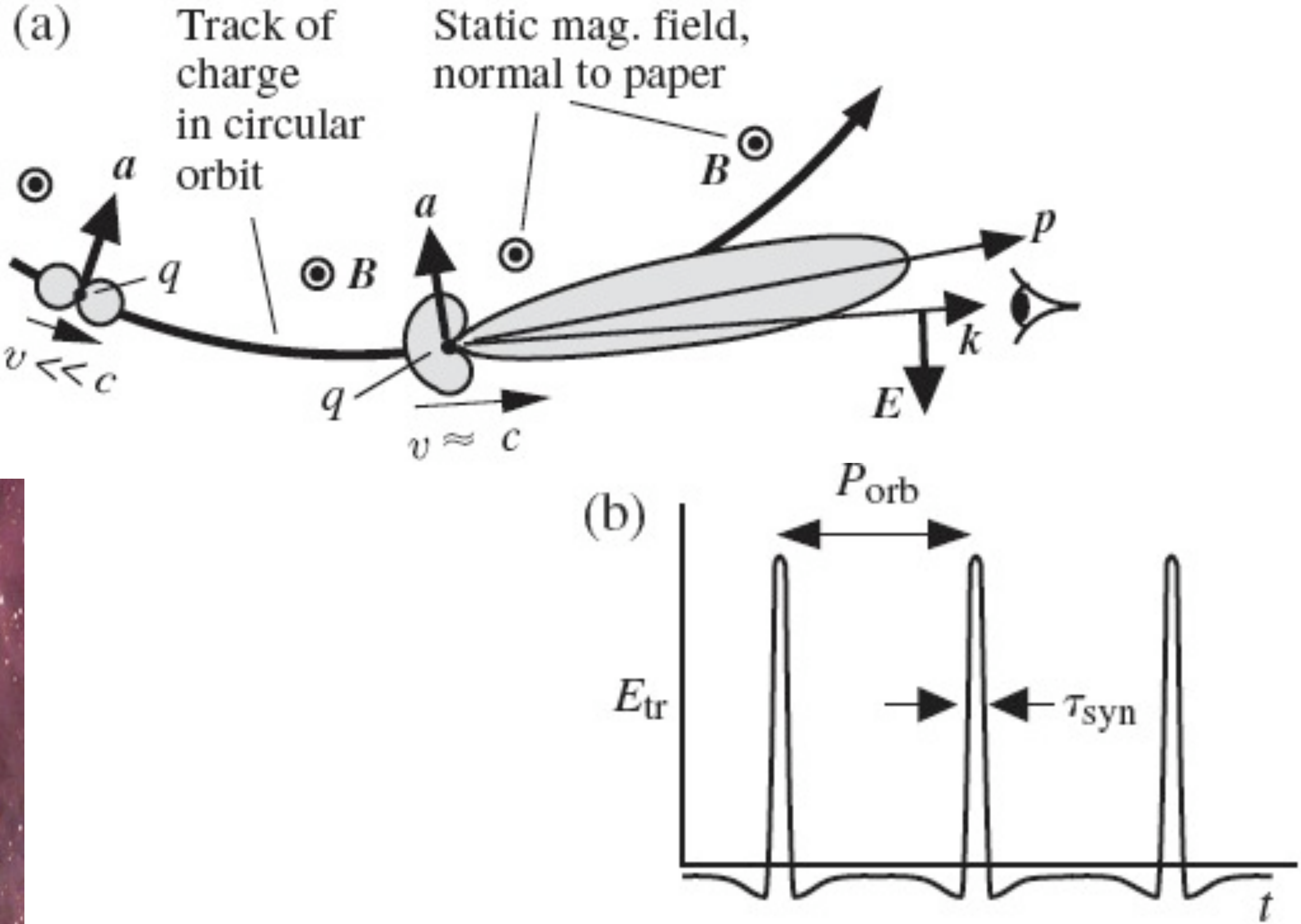
# Características da emissão

- No movimento não-relativistico, a frequência de emissão é $\omega_{cic}$=(qB/mc) → única!
- O aumento da velocidade, tal que v → c, causa 3 efeitos:
  - harmônicos superiores passam a contribuir para o espectro, com intensidade proporcional à potência de v/c
  - A frequência de rotação começa a decrescer proporcionalmente a $1/\gamma$
  - Radiação fica confinada a um cone de abertura $\theta \sim 1/\gamma$ e o observador verá a radiação em intervalos $\Delta t \sim \gamma^{-3}/\omega_B$

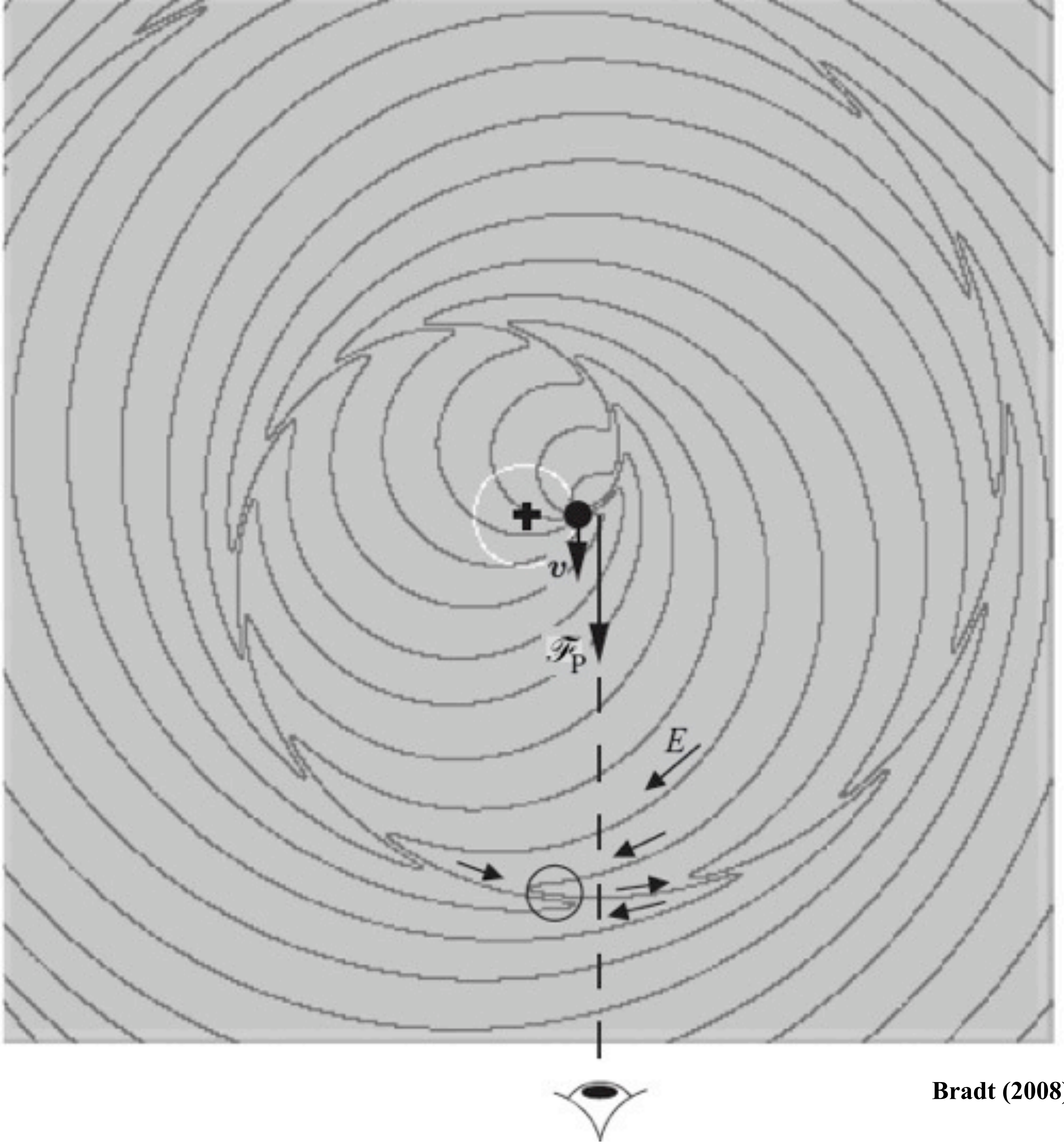
# Mais características...

- No domínio das frequências, aparecem picos em $\omega_B$ e seus harmônicos, com um corte em $\omega_c \sim 1/\Delta t \propto \gamma^{-3}\omega_B$
- Para $\gamma \gg 1$, os harmônicos vão se aproximando, e cada contribuição vai se alargando devido à distribuição de $\gamma$ e do ângulo $\alpha$.
- Consequência: espectro parece um contínuo, com máximo em $\omega_c$, e a maior parte da energia será emitida próxima a $\omega_c$.


23


(a)
Track of charge in circular orbit
Static mag. field, normal to paper
a
q
B
v << c
v ≈ c
p
k
E
(b)
P orb
E tr
τ syn
t

Bradt (2008)




Bradt (2008)



25

# Comentários sobre a polarização...

- Emissão sincrotron apresenta alto grau de polarização
- Considerando um único $e^-$ orbitando um campo magnético, para v << c, teremos:
  - Radiação linearmente polarizada no plano da órbita ($E \perp B$)
  - Radiação circularmente polarizada na direção de B
- Para v ~ c, a situação modifica-se drasticamente:
  - Emissão praticamente confinada ao plano da órbita
  - Ensemble de $e^-$ com uma distribuição de "pitch angles" faz com que as componentes da polarização circular se cancele, restando somente a componente linear

# Resumo do tratamento simplificado

- A distribuição angular de uma única partícula emissora está localizada próximo (por um fator $1/\gamma$) no cone com ângulo igual à metade do "pitch angle"
- O espectro de uma única partícula vai até uma frequência crítica $\omega_C$, sendo somente função de $\omega/\omega_C$
- Uma distribuição de partículas com energia E, seguindo uma lei de potência com índice espectral p, num intervalo suficientemente grande, origina um espectro de radiação com índice espectral s, tal que $s=(p-1)/2$

# O tratamento completo

- Envolve a solução da expressão para a potência emitida por frequência angular e ângulo sólido

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2\omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int (\vec{n} \times \vec{n} \times \beta) e^{[i\omega(t' - \vec{n}\bullet\vec{r}_0(t')/c)]} dt' \right|^2$$

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \beta) = -\epsilon_{\perp}\text{sen}(vt'/r) + \epsilon_{||}\cos(vt'/r)\text{sen}\theta$$

$$\begin{aligned} t' - \vec{n} \bullet \vec{r}_0(t')/c &= t' - \frac{a}{c}\cos\theta \ \text{sen}(\frac{vt'}{a}) \\ &\approx \frac{1}{2\gamma^2}\left[(1 + \gamma^2\theta^2)t' + \frac{c^2\gamma^2 t'^3}{3r^2}\right] \end{aligned}$$

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{dW_\perp}{d\Omega d\omega} + \frac{dW_\parallel}{d\Omega d\omega}$$

$$\frac{dW_\perp}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|\int \frac{ct'}{a}\exp[\frac{i\omega}{2\gamma^2}(\theta_\gamma^2 t' + \frac{c^2\gamma^2 t'^3}{3r^2}]dt'\right|^2$$

$$\frac{dW_\parallel}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2\omega^2\theta^2}{4\pi^2 c}\left|\int \exp[\frac{i\omega}{2\gamma^2}(\theta_\gamma^2 t' + \frac{c^2\gamma^2 t'^3}{3r^2}]dt'\right|^2$$

$$y \equiv \gamma\frac{ct'}{r\theta_\gamma} \qquad \eta \equiv \frac{\omega r\theta_\gamma^3}{3c\gamma^3}$$

$$\frac{dW_\perp}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left(\frac{r\theta_\gamma^2}{\gamma^2 c}\right)^2\left|\int_{-\infty}^{+\infty} y\exp[\frac{3}{2}i\eta(y + \frac{1}{3}y^3)]dy\right|^2$$

$$\frac{dW_\parallel}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2\omega^2\theta^2}{4\pi^2 c}\left(\frac{r\theta_\gamma}{\gamma^2 c}\right)^2\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\frac{3}{2}i\eta(y + \frac{1}{3}y^3)]dy\right|^2$$

$$\eta(\theta = 0) \equiv \frac{\omega r \theta_\gamma^3}{3c\gamma^3} = \frac{v\omega}{3c\gamma^3 \omega_B \mathrm{sen}\alpha} = \frac{\omega}{2\omega_c}$$

$$\frac{dW_\perp}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left(\frac{r\theta_\gamma^2}{\gamma^2 c}\right)^2 K_{2/3}^2(\eta)$$

$$\frac{dW_\parallel}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2\omega^2\theta^2}{4\pi^2 c}\left(\frac{r\theta_\gamma}{\gamma^2 c}\right)^2 K_{1/3}^2(\eta)$$

$$\frac{dW_\perp}{d\Omega d\omega} = \frac{2q^2\omega^2 r^2 \mathrm{sen}\alpha}{3\pi c^3\gamma^4}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\gamma^4 K_{2/3} d\theta$$

$$\frac{dW_\parallel}{d\Omega d\omega} = \frac{2q^2\omega^2 r^2 \mathrm{sen}\alpha}{3\pi c^3\gamma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\gamma^2 K_{1/3} d\theta$$

$$\frac{dW_\perp}{d\Omega d\omega} = \frac{\sqrt{3}q^2\gamma \mathrm{sen}\alpha}{2c}\left[F(x) + G(x)\right]$$

$$\frac{dW_\parallel}{d\Omega d\omega} = \frac{\sqrt{3}q^2\gamma \mathrm{sen}\alpha}{2c}\left[F(x) - G(x)\right]$$

$$F(x) \equiv x \int_x^\infty K_{5/3}(\xi)d\xi \qquad G(x) \equiv x\ K_{2/3}(\xi)$$

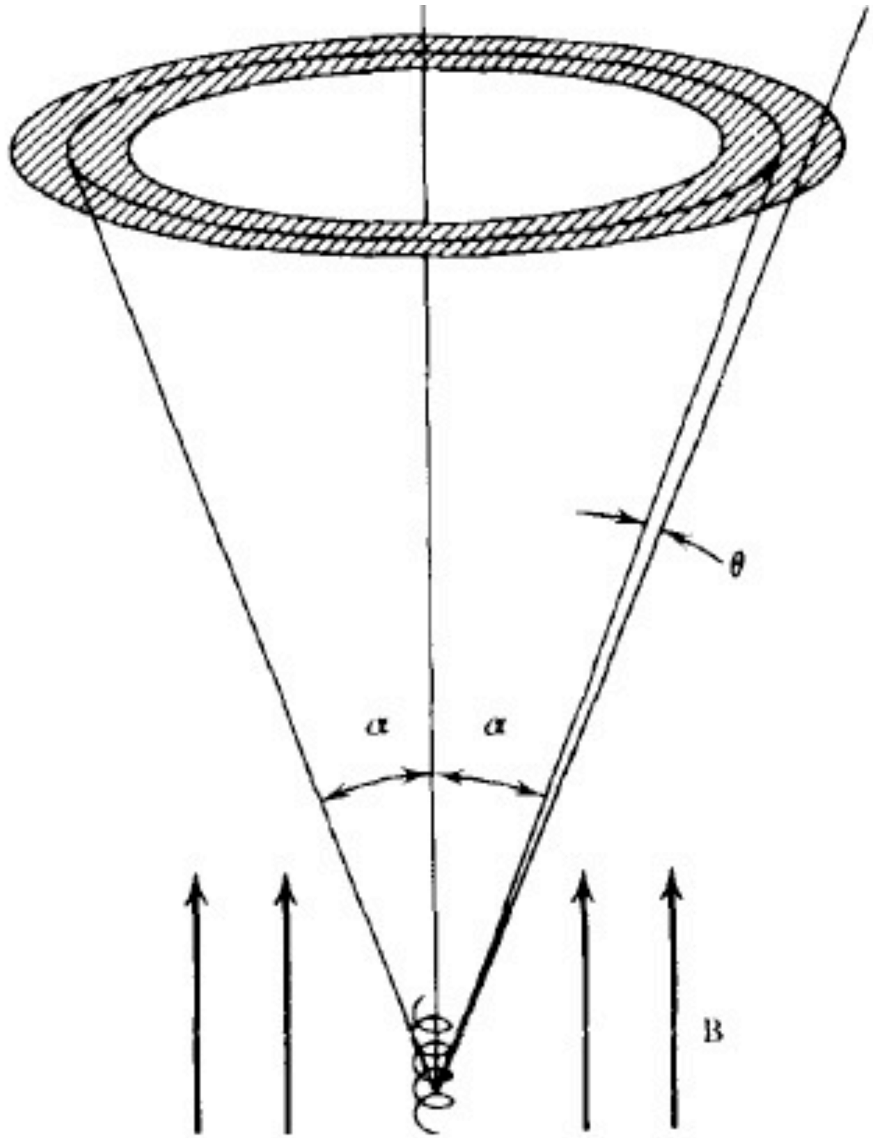



***Figure 6.5** Synchrotron emission from a particle with pitch angle α. Radiation is confined to the shaded solid angle.*

**R&L (1979)**

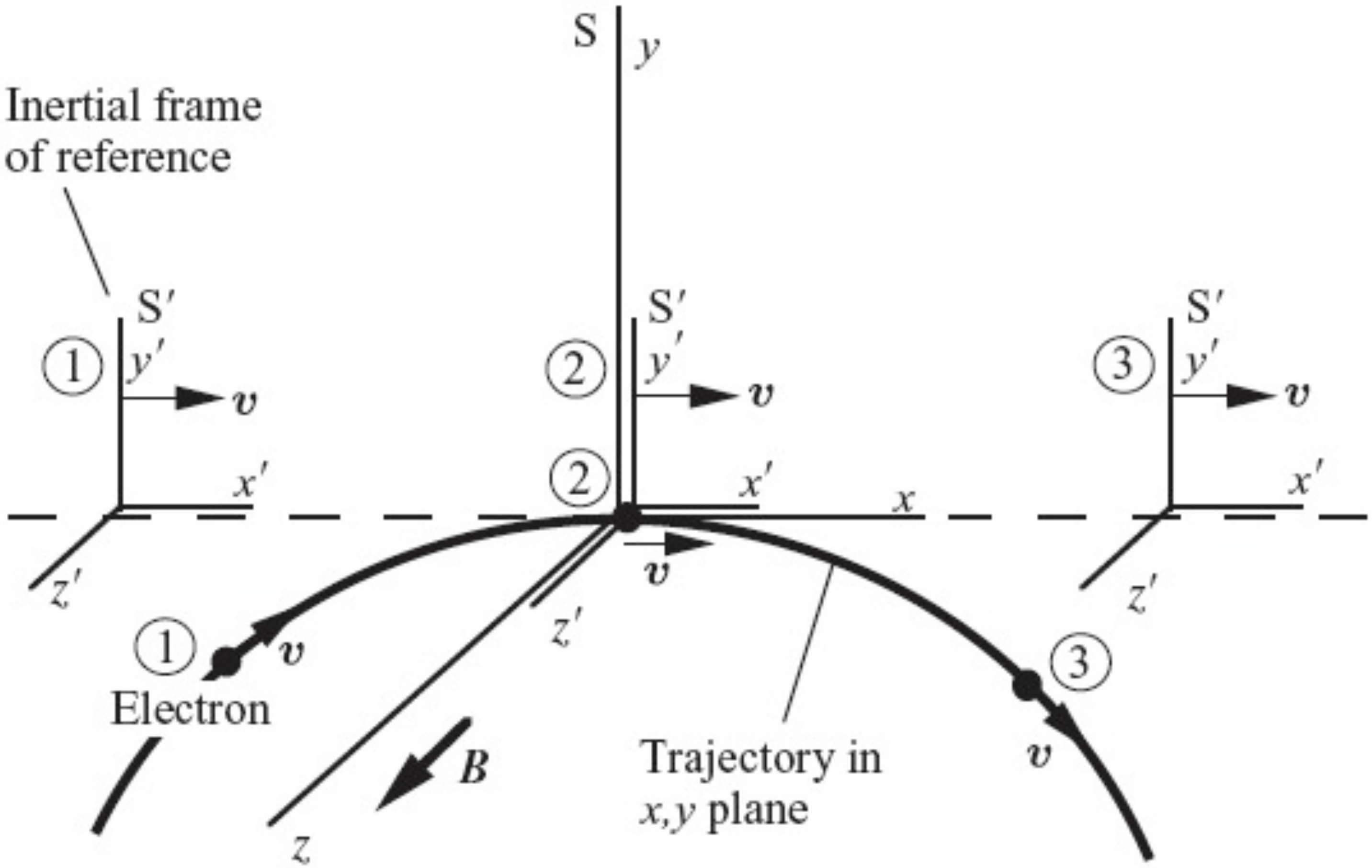
$$P\perp(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B\text{sen}\alpha}{4\pi mc^2}\left[F(x) + G(x)\right]$$

$$P_{||}(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B\text{sen}\alpha}{4\pi mc^2}\left[F(x) - G(x)\right]$$

$$P(\omega) = P\perp(\omega) + P_{||}(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B\text{sen}\alpha}{2\pi mc^2}F(x)$$

$$F(x) \sim \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}, \qquad x >> 1$$

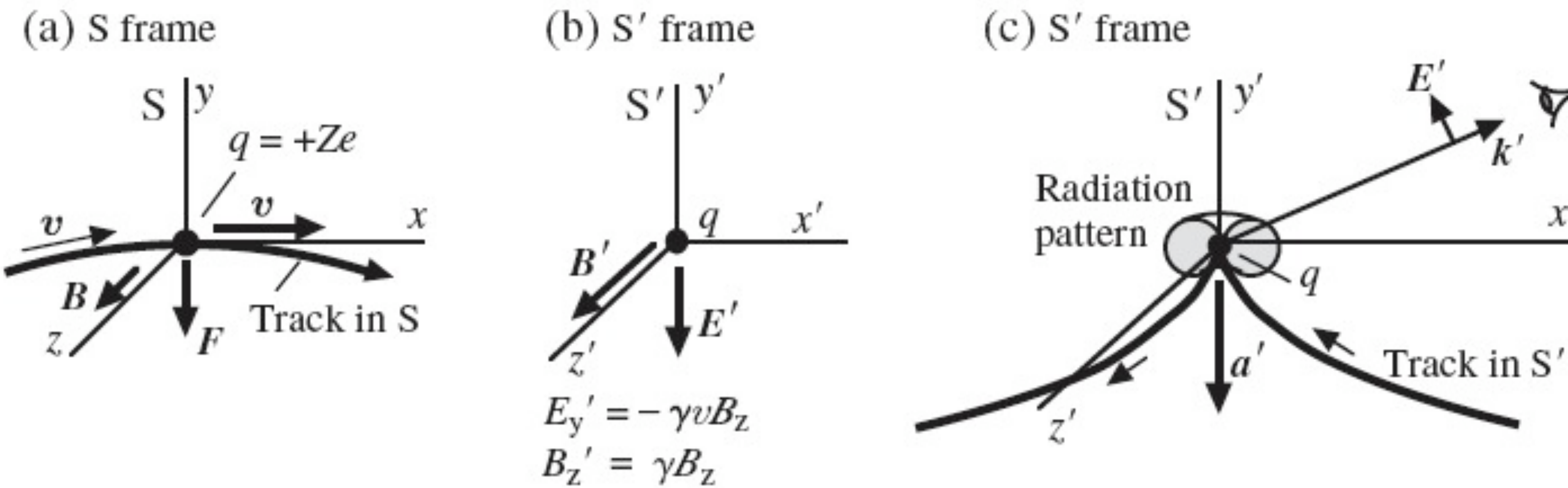
$$F(x) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-x} x^{1/2}, \qquad x << 1$$




Bradt (2008)



34



(a) S frame
S
y
q = +Ze
v
v
x
B
z
F
Track in S
(b) S′ frame
S′
y′
q
x′
B′
E′
z′
E_y′ = − γvB_z
B_z′ = γB_z
(c) S′ frame
S′
y′
E′
k′
Radiation
pattern
x
q
a′
z′
Track in S′


Bradt (2008)

# O índice espectral

- Da expressão para a potência $P(\omega)$, nota-se que a única dependência com $\gamma$ está em $\omega_C$.
- Podemos usar esse detalhe para derivar o índice espectral da emissão sincrotron, quando ela pode ser aproximada por uma expressão de lei de potência, num certo intervalo de frequências...
- A distribuição de partículas com energias relativísticas entre $E_1$ e $E_2$ pode ser escrita como:
- $$N(E)dE = CE^{-p}dE \qquad E_1 < E < E_2$$
- Sendo que $C$ varia com o “pitch angle” e outras variáveis dinâmicas

- A integral para a potência emitida por um único e⁻ pode ser reescrita com esse funcional de energia, dando:

$$\begin{aligned} P_{tot} &= C\int_{E_1}^{E_2} P(\omega)E^{-p}dE \\ &= C\int_{E_1}^{E_2} F(\frac{\omega}{\omega_c})E^{-p}dE \end{aligned}$$

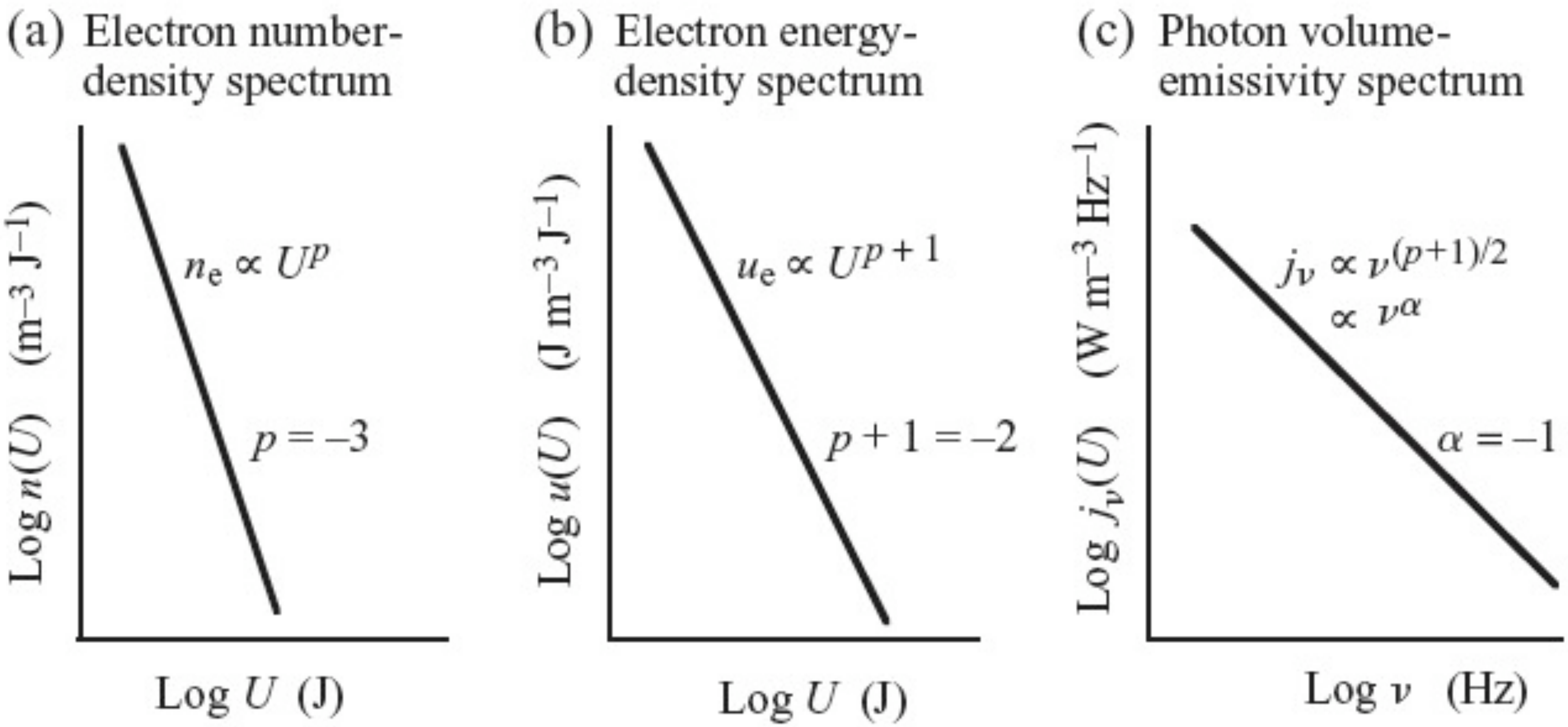
- Trocando de variáveis ($x \equiv \omega/\omega_c$) e lembrando que $\omega_c \sim \gamma^2$

$$P_{tot}(\omega) \quad \propto \quad \omega^{-(p-1)/2}\int_{x_1}^{x_2} F(x)x^{(p-3)/2}dx$$

- para grandes intervalos de energia, a integral tende a uma constante, de forma que

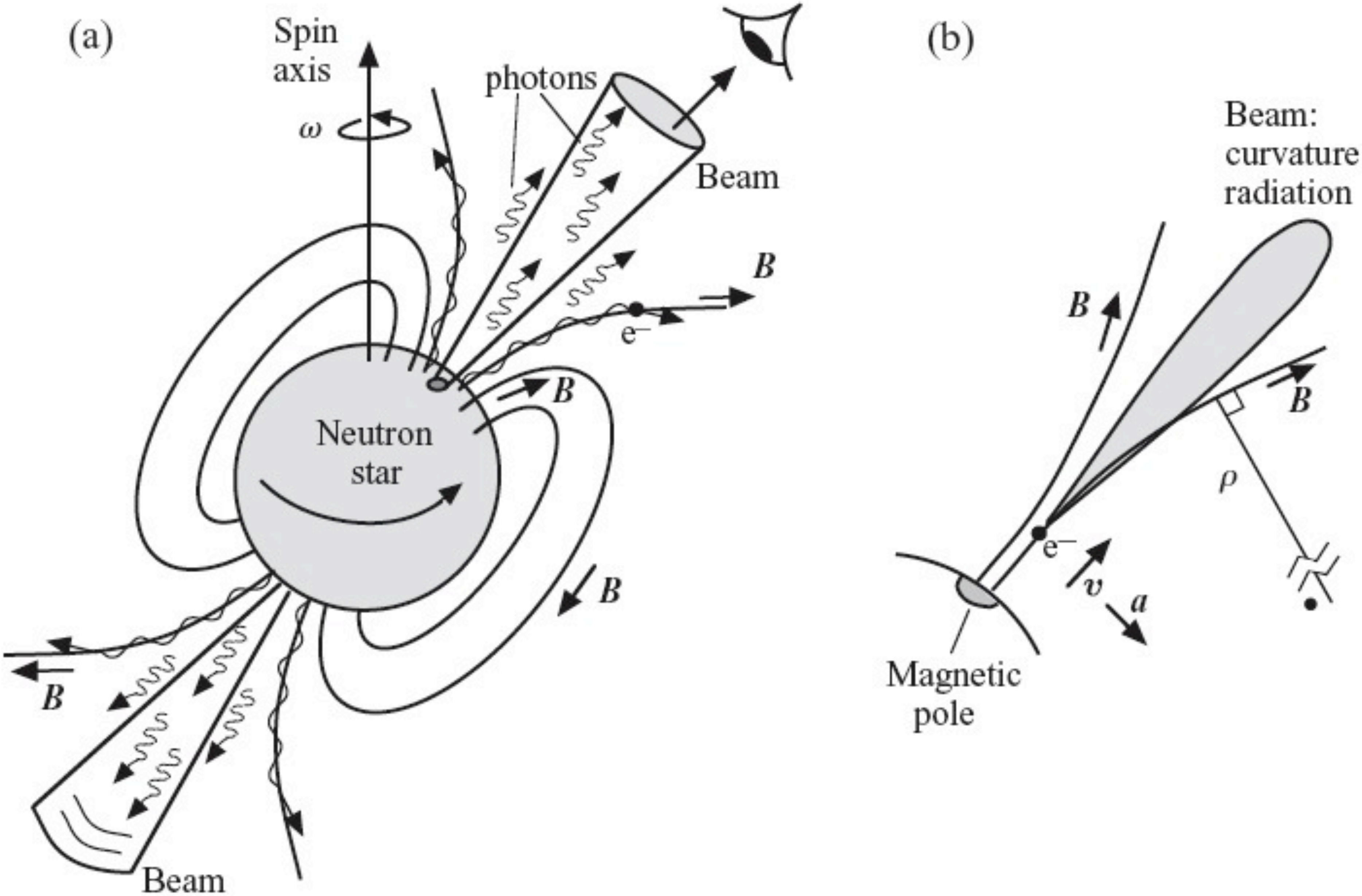
$$P_{tot}(\omega) \quad \propto \quad \omega^{-(p-1)/2}$$

- de forma que o índice espectral **s** da emissão está relacionado com o índice da distribuição de energia das partículas emissoras **p**, pela expressão $s = (p-1)/2$
-

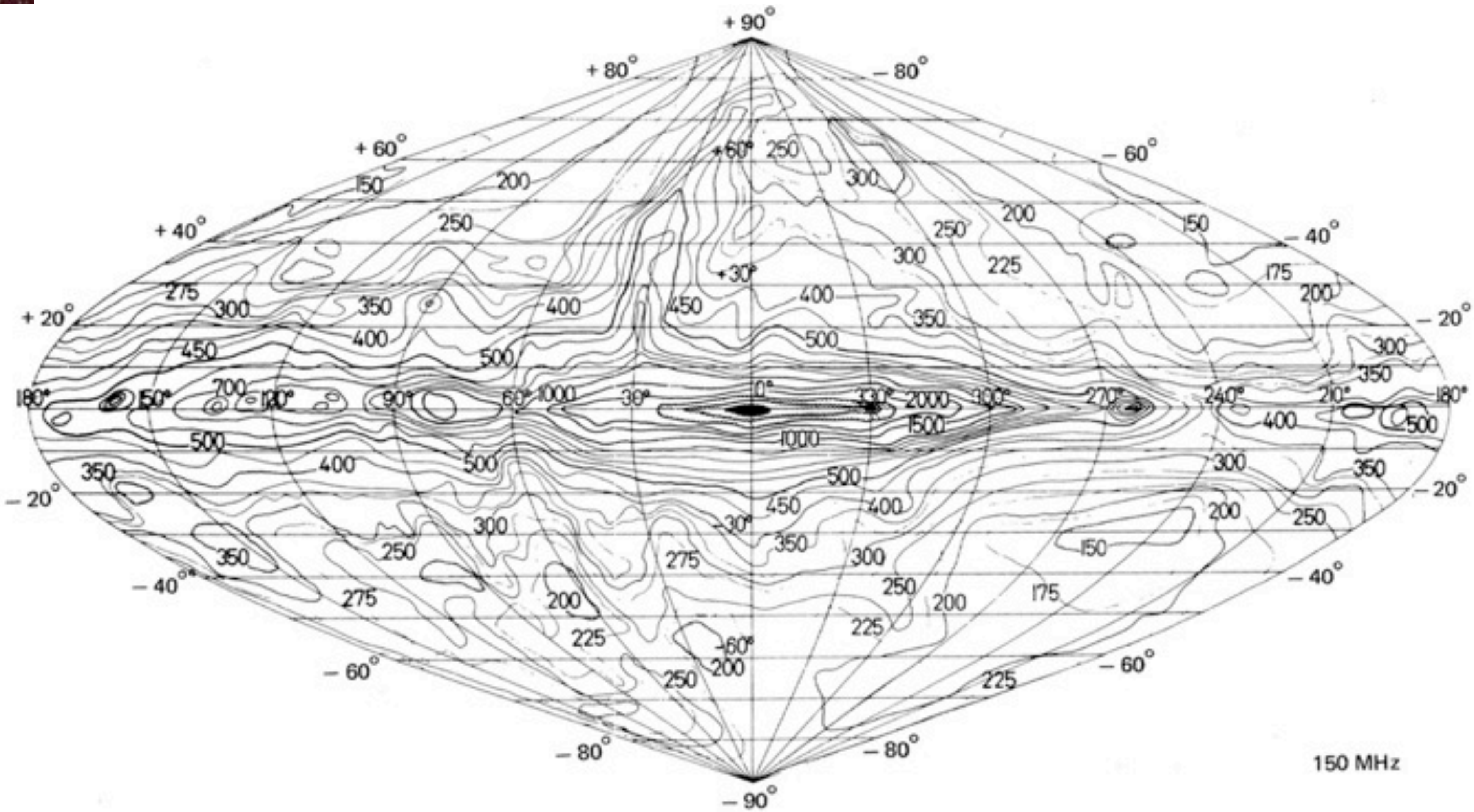


(a) Electron number-density spectrum
$n_e \propto U^p$
$p = -3$
Log $n(U)$ (m$^{-3}$ J$^{-1}$)
Log $U$ (J)
(b) Electron energy-density spectrum
$u_e \propto U^{p+1}$
$p + 1 = -2$
Log $u(U)$ (J m$^{-3}$ J$^{-1}$)
Log $U$ (J)
(c) Photon volume-emissivity spectrum
$j_\nu \propto \nu^{(p+1)/2}$
$\propto \nu^\alpha$
$\alpha = -1$
Log $j_\nu(U)$ (W m$^{-3}$ Hz$^{-1}$)
Log $\nu$ (Hz)


**Bradt (2008)**


(a)
Spin axis
ω
photons
Beam
B
e⁻
Neutron star
B
B
B
Beam
(b)
Beam: curvature radiation
B
B
ρ
e⁻
v
a
Magnetic pole


40


+ 90°
+ 80°
– 80°
+ 60°
– 60°
+ 40°
– 40°
+ 20°
– 20°
180°
150°
120°
90°
60°
30°
0°
330°
300°
270°
240°
210°
180°
– 20°
– 20°
– 40°
– 40°
– 60°
– 60°
– 80°
– 80°
– 90°
150 MHz