Radiação de cargas em movimento

Carlos Alexandre Wuensche

Processos Radiativos I

Roadmap!!!!!!

- Uma boa discussão das derivações dessa aula podem ser encontradas no cap. 14 do livro "Classical Electrodynamics" (J. D. Jackson)

Introdução

- Antes de vermos as cargas em movimento, é necessário discutir os potenciais retardados, pois eles definirão os campos das cargas em movimento
- A forma das equações de Maxwell e suas simetrias em relação aos operadores permite que os campos **E** e **B** sejam expressos em termos de um potencial escalar e um potencial vetorial.
  - Um escalar e um vetor é mais fácil de lidar que 2 vetores!
  - Eqs. para $\varphi(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ são mais simples de lidar do que as eqs. de Maxwell
  - A formulação relativística da teoria eletromagnética é mais simples de ser expressa em termos dos potenciais que dos campos

Os potenciais

- A(r,t) $\rightarrow$ potencial vetorial; φ (**r**, t) $\rightarrow$ potencial escalar
- B pode ser expresso como **B** = ∇x**A**; possível pois ∇.**B** = 0!
- A eq. de Maxwell para o campo elétrico, no vácuo, pode ser escrita como:

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \qquad \text{eq. 1}$$

- Daí segue que o termo entre parenteses pode ser expresso como o gradiente de um campo escalar:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \longrightarrow \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{eq. 2}$$

Os potenciais

- A(r,t) $\rightarrow$ potencial vetorial; φ (**r**, t) $\rightarrow$ potencial escalar
- Eq. Maxwell 1
  B pode ser expresso como **B** = ∇x**A**; possível pois ∇.**B** = 0!
- A eq. de Maxwell para o campo elétrico, no vácuo, pode ser escrita como:

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$ eq. 1

Eq. Maxwell 2

- Daí segue que o termo entre parenteses pode ser expresso como o gradiente de um campo escalar:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \longrightarrow \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$ eq. 2

Equação da onda para os potenciais

- Reescreveremos agora as duas eqs. de Maxwell restantes (para div(E) e rot(H)), em termos das novas definições de E e B:

eq. 3

$$\nabla^2\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bullet \vec{A}) = -4\pi\rho \qquad \rightarrow \qquad \rho = \rho_{livre} + \rho_{mat}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

eq. 4

- Se, em 4, somamos e subtraímos uma derivada de 2a. ordem para φ, e usamos a identidade vetorial

$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=-\nabla^2\mathbf{A}+\nabla(\nabla.\mathbf{A})$, vamos obter:

Equação da onda para os potenciais

- Reescreveremos agora as duas eqs. de Maxwell restantes (para div(E) e rot(H)), em termos das novas definições de E e B:

eq. 3

$$\nabla^2\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bullet \vec{A}) = -4\pi\rho \quad \xrightarrow{\text{Eq. Maxwell 3}} \quad \rho = \rho_{livre} + \rho_{mat}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Eq. Maxwell 4 eq. 4

- Se, em 4, somamos e subtraímos uma derivada de 2a. ordem para φ, e usamos a identidade vetorial

$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla . \mathbf{A})$, vamos obter:

Equação da onda para os potenciais

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\boxed{(\nabla\bullet\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t})} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

eq. 5

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boxed{(\nabla\bullet\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t})} = -4\pi\rho$$

eq. 6

As transformações de calibre ("gauge")

- Os potenciais não são unicamente determinados pelas condições anteriores.
- Adicionar o gradiente de uma função escalar genérica ao potencial vetor, ou a derivada temporal dessa mesma função ao potencial escalar mantém as eqs. de Maxwell invariantes. Ou seja:

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \nabla\psi, \qquad & \vec{B} \rightarrow \vec{B} \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad & \vec{E} \rightarrow \vec{E} \end{aligned}$$

eq. 7

Liberdade de escolher o potencial...
Uma função livre (ψ) implica em uma equação de vínculo escalar

As transformações de calibre ("gauge")

- Importante escolher ψ de forma que a condição de Lorentz seja satisfeita!

$$\nabla \bullet \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

"gauge" de Lorentz eq. 8

- Dessa forma, as eqs. XX e YY podem ser "transformadas" em eqs. de onda não homogêneas, isto é, com "termos de fonte", com soluções definidas em termos de integrais sobre as fontes.

As transformações de calibre ("gauge")

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

eqs. 9

$$\phi(\vec{r},t) = \int \frac{[\rho]d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{[\vec{j}]d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

eqs. 10

Ou, de forma geral (notação de quadrivetores):

$$\Box^2\begin{pmatrix}\phi \\ \vec{A}\end{pmatrix} = -4\pi\begin{pmatrix}\rho \\ \vec{j}/c\end{pmatrix}$$

eq. 11

As transformações de calibre ("gauge")

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

eqs. 9

$$\phi(\vec{r},t) = \int\frac{[\rho]d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int\frac{[\vec{j}]d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Potenciais "retardados"

eqs. 10

Ou, de forma geral (notação de quadrivetores):

$$\Box^2\begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} = -4\pi\begin{pmatrix}\rho\\ \vec{j}/c\end{pmatrix}$$

eq. 11

Potenciais retardados

$$[Q] \equiv Q(r', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|$$ eq. 12

- Calculados num "tempo retardado", isto é, nas condições que existiam no ponto **r'** no instante anterior a t, por EXATAMENTE o intervalo de tempo exigido para a luz viajar de **r** a **r'**.
- A informação em **r'** propaga-se com a velocidade da luz, de modo que os potenciais em **r** somente podem ser afetados pelas condições em **r'** após um tempo t "retardado" em relação a **r'**!

Receita...

- Forma direta para encontrar E e B produzidos por uma densidade de carga ρ ou uma densidade de corrente j:
  - **Encontre os potenciais retardados por meio das integrais XX**
  - **Calcule E e B a partir de suas expressões definidas com os potenciais**

Potenciais de Lienard-Wiechart

- Principais diferenças dos potenciais eletrostáticos:
  - Há um fator de correção devido ao movimento das cargas ($k = 1 - (\mathbf{n}.\mathbf{u}/c)$) $\rightarrow$ concentração do potencial,

    esfericamente simétrico quando em repouso, na forma de um cone quando $v \rightarrow c$
  - Todas as quantidades são calculadas no tempo retardado t_{ret}.
    - ☑ O retardamento permite a uma partícula emitir radiação
    - ☑ A dependência implícita do potencial com a posição (ocorre via definição do tempo retardado) e a diferenciação com respeito a essa dependência leva o fator 1/r presente no potencial para o comportamento dos campos

O processo...

- Usamos as funções de Green para φ e **A** para obter

$$\begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} = \int_V \begin{pmatrix}\rho(\vec{x}', t')\\ \vec{j}(\vec{x}', t')/c\end{pmatrix} \frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad \textbf{eq. 15} \qquad t' = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$$

- Uma carga em movimento pode ser descrita como

$$\begin{aligned}\rho(t) &= q\delta(\vec{x}-\vec{r}(t))\\ \vec{j}(t) &= q\vec{v}\delta(\vec{x}-\vec{r}(t))\end{aligned} \quad \textbf{eq. 16}$$

- que, ao ser inserida em XX, nos dá os potencials de Lienard-Wiechart, calculado para t = τ + R(τ)/c

$$\begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} = \left[\frac{1}{R - \vec{R}\bullet\vec{v}/c}\begin{pmatrix}\rho\\ q\vec{j}/c\end{pmatrix}\right]_{ret} \qquad \textbf{eq. 17}$$

Campos de radiação e velocidade

- O campo elétrico é composto de 2 termos:
  - o campo de velocidades (dependência com $1/R^2$), que é uma generalização da lei de Coulomb (caso eletrostático ou quando $u \ll c$)
  - $v \neq 0$, $\mathbf{A} \neq 0 \rightarrow \mathbf{B} \neq 0 \rightarrow$ carga em movimento produz campo!
  - o campo de aceleração (dependência com $1/R$) é perpendicular a **n** e proporcional à aceleração da partícula. Ele é comumente chamado de "campo de radiação"!
- **E**, **B** e **n** formam uma tríade de vetores mutuamente perpendiculares cujas propriedades são consistentes com as soluções radiativas das equações de Maxwell livres de carga.

14

O cálculo de E_{rad} e E_{vel}

- O processo é longo, mas direto.
- Inserimos φ e **A** nas eqs. 1 e 2 e calculamos a conexão entre os tempos t e τ

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = \left(1 - \frac{R}{\vec{R}} \bullet \frac{\vec{v}}{c}\right)$$

eq. 17

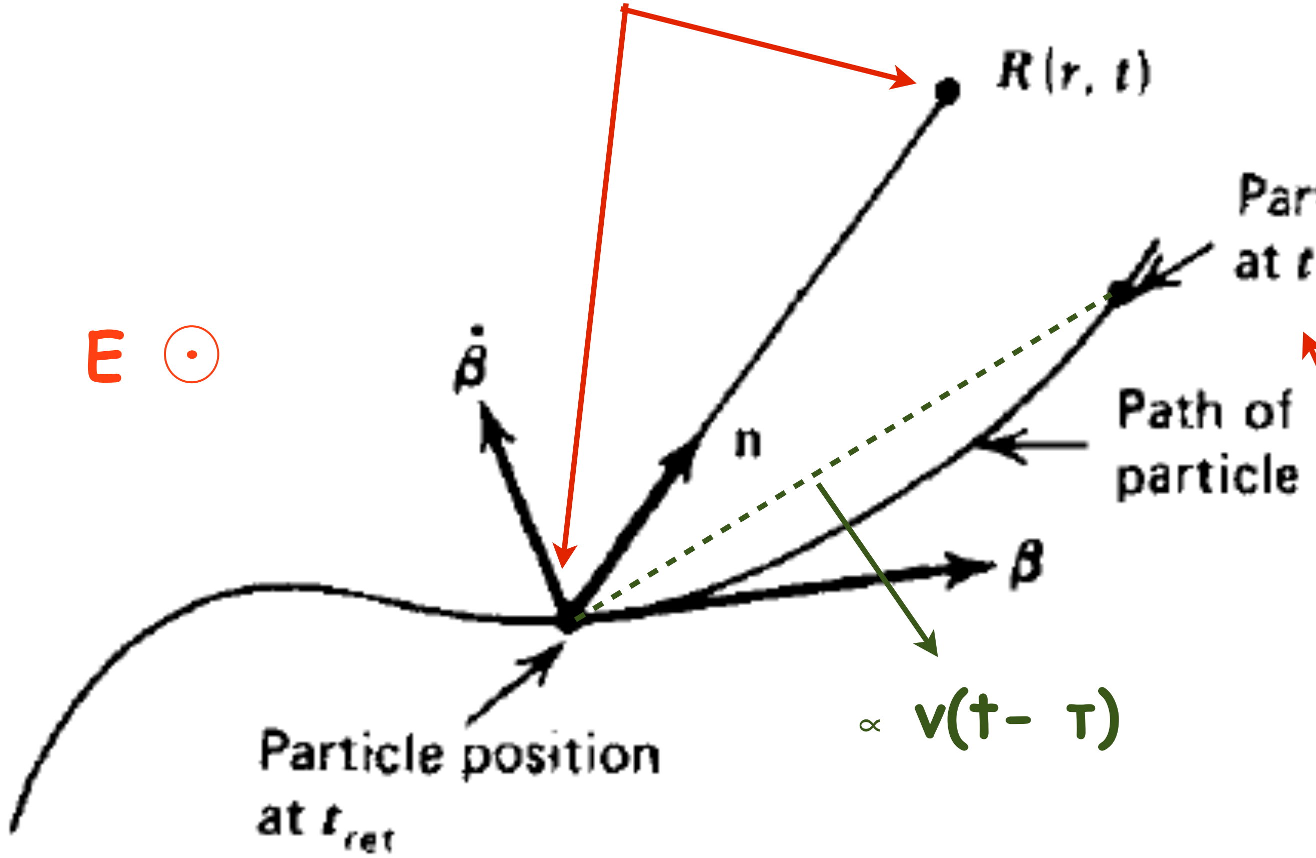
$$\vec{E} = \frac{q}{(R - \vec{R} \bullet \beta)^3}\left\{(1-\beta^2)(\vec{R} - R\beta) + \frac{\vec{R}}{c} \times [(\vec{R} - R\beta) \times \dot{\beta}]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}$$

eqs. 18

Efeito sentido em R, causado pela partícula quando estava em R_{ret}

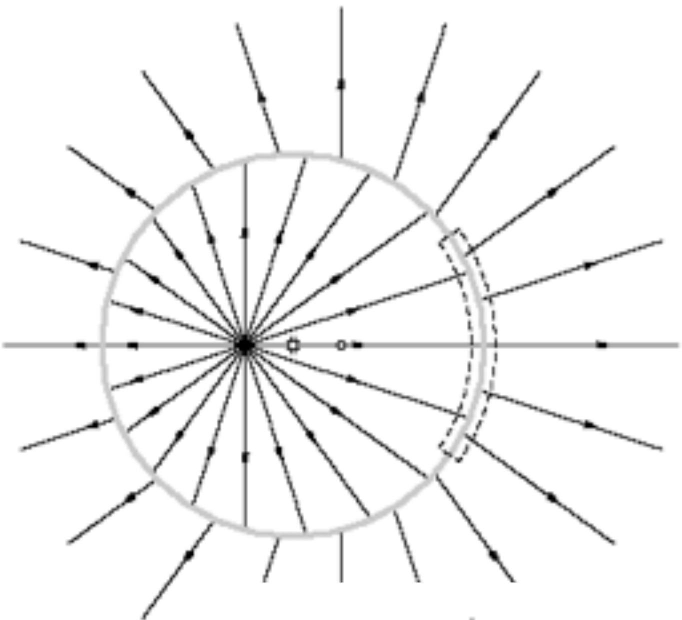
$t' > t$...

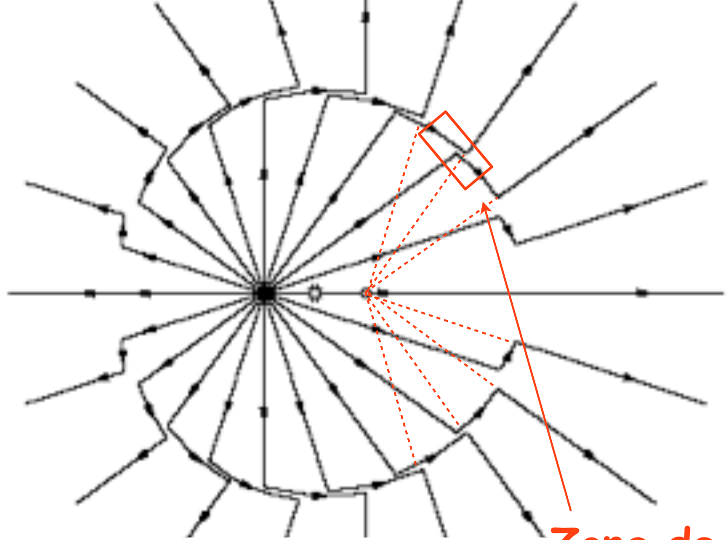


Posição da partícula em t não vai afetar R em t, mas sim em t' > t!!!

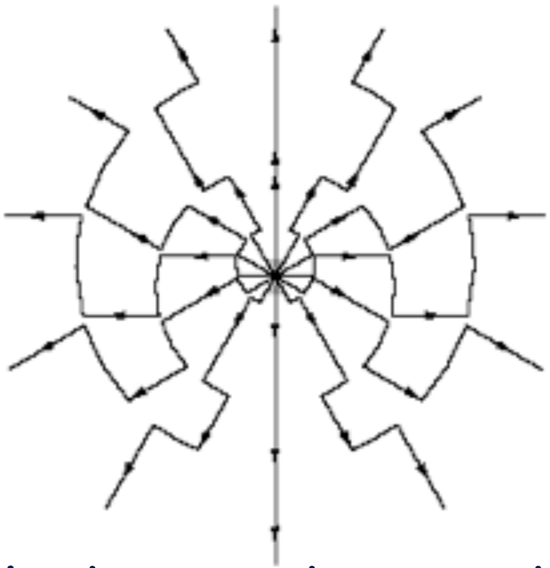
t = 0, carga é parada num ponto x=0

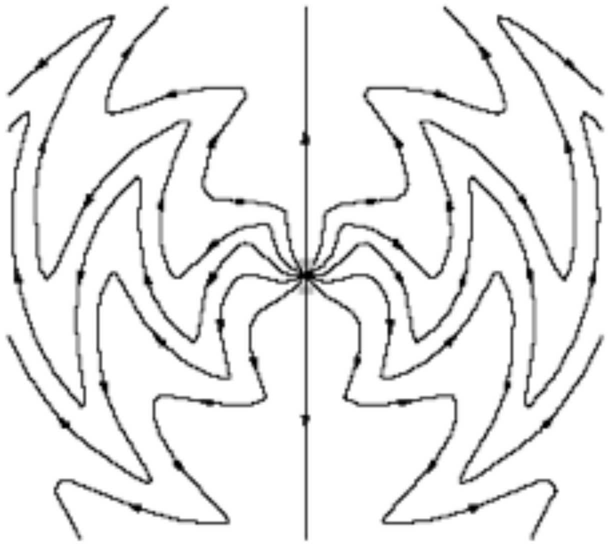
t = 1, as linhas são corrigidas, dentro da zona de transição, para a posição correta e fora dela, apontam para onde a partícula deveria estar se não tivesse parado.





Zona de transição





Carga oscilando entre duas paredes

Carga oscilando num dipolo

17

Potência irradiada por uma única partícula

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{4\pi}|\int [R \bullet \vec{E}(t)e^{i\omega t}]dt|^2 \qquad \textbf{eq. 19a}$$

$$= \frac{q}{4\pi c}\left|\int \left[\vec{n} \times \left\{(\vec{n} - \vec{\beta}) \times d\vec{\beta}/dt\right\}(1 - \tfrac{R}{\vec{R}} \bullet \tfrac{\vec{v}}{c})^{-3}\right] e^{i\omega t} dt\right|^2 \qquad \textbf{eq. 19b}$$

Radiação de partículas não relativísticas

- Caso não relativístico mais fácil de tratar, inicialmente. β=v/c
- Comparando a magnitude das duas componentes do campo elétrico (E_{rad} e E_{vel}) temos:

$$E_{rad} \sim \frac{1}{R^3}.\frac{R}{c}.R.\dot{\beta} = \frac{\dot{v}}{Rc^2} \quad \text{eq. 20}$$

$$E_{vel} \sim \frac{1}{R^3}.R = \frac{1}{R^2} \quad \text{eq. 21}$$

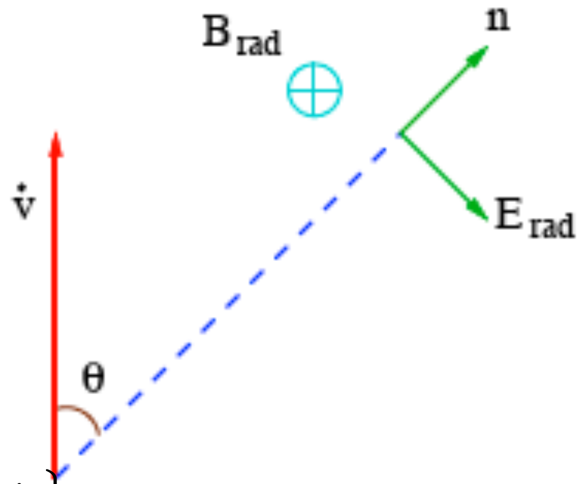
$$\frac{E_{rad}}{E_{vel}} \sim \frac{R\dot{v}}{c^2} \quad \text{eq. 22}$$

Radiação de partículas não relativísticas

- Uma componente particular de freqüência f desse campo permite escrever $dv/dt \sim v f = v / \lambda$ e definir um limite em que cada um dos campos predomina.
  - $R \leq \lambda$ (E_{vel} predomina, por um fator > c/v - "near zone") - peso dado pelo termo c/v
  - $R \gg \lambda\, c/v$ (E_{rad} predomina, em função de R - "far zone")
- Objetos astrofísicos encontram-se no regime "far zone" (MUUUUUITO DISTANTES) e o campo de radiação predomina!

20

Movimento NR



- Supondo "far zone", teremos que o segundo termo da eq. 23 abaixo predomina:

$$\vec{E} = \frac{q}{(R - \vec{R} \bullet \beta)^3} \left\{ (1-\beta^2)(\vec{R} - R\beta) + \frac{\vec{R}}{c} \times [(\vec{R} - R\beta) \times \dot{\beta}] \right\}$$

eq. 23

$$\vec{B} = \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}$$

- Assim, $E_{rad} = B_{rad} = qv'/Rc^2 sen\theta$
- O vetor de Poynting aponta na direção de n na figura, e possui magnitude dada por S e unidade de ($erg.s^{-1}.cm^{-2}$).

$$S = \frac{c}{4\pi} E_{rad}^2 = \frac{c}{4\pi} \frac{q^2 v'^2}{R^2 c^4} sen^2\theta$$

eq. 24

- A potência irradiada por unidade de tempo no ângulo sólido dΩ em torno de **n** é dada por

$$\frac{dW}{dtd\Omega} = S * dA = \frac{q^2\dot{v}^2}{4\pi c^3} sen^2\theta$$

eq. 25

- E a potência total é obtida integrando-se a eq. acima em todo o ângulo sólido Ω

$$\begin{aligned} P &= \frac{dW}{dt} = \frac{q^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\int_\Omega sen^2\theta d\Omega \\ &= \frac{q^2(\dot{v})^2}{2c^3}\int_{-1}^{1}(1 - cos^2\theta)d(cos\theta) \\ &= \frac{q^2\dot{v}^2}{2c^3}\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)d\mu \end{aligned}$$

eq. 26

eq. 27

Fórmula de Larmor: emissão de uma ÚNICA carga acelerada

$$\boxed{P = \frac{2q^2\dot{v}^2}{3c^3}}$$

eq. 28

Detalhes a lembrar sobre a expressão que define a potência emitida

- A potência irradiada é proporcional ao quadrado da carga e da aceleração
- O padrão de dipolo característico da solução aparece no termo $\text{sen}^2\theta$. O máximo é emitido perpendicular à direção de aceleração (oscilação) e nenhuma radiação é emitida paralela à direção de aceleração (oscilação).
- A direção instantânea da emissão é determinada por v' e **n**.
- Se a partícula acelera ao longo de uma linha, a radiação emitida será 100% polarizada linearmente no plano definido por v'e **n**.

23

A aproximação de dipolo

- A radiação emitida por muitas partículas deveria, em princípio, ser somente a superposição da expressão de Larmor (ΣE_{rad}...), mas a coisa é mais complicada!
- Como todo mundo é calculado em um tempo retardado, consideramos que o efeito do tempo é diferente para cada partícula...
- Como levar em conta as relações de fase entre as diferentes partículas????
- **COMPLICADO!!!!!!!!**
- Como fazer uma aproximação para tratar esse caso analiticamente?

A aproximação de dipolo

- Consideremos um sistema de dimensão L e escala de tempo de emissão típica τ
- A diferença entre os tempos retardados do sistema é desprezível se $\tau \gg L/c$ (tempo de propagação da informação)
- Se $\tau \sim 1/\nu$ (frequencia característica) e $\tau \gg L/c$, temos que $c/\nu = \lambda \gg L$!!!
- Ou seja, se o sistema é menor que o comprimento de onda característico da emissão, podemos ignorar suas dimensões!
- Entretanto, devemos levar em conta uma dimensão típica do sistema l, tal que $\tau \sim v/l$, em que $l \ll L$. Assim, $v/c \ll l/L$ e $v \ll c$, de modo que o tratamento do sistema em questão pode ser NÃO-RELATIVÍSTICO!

A aproximação de dipolo

- Para um conjunto de partículas, é fácil imaginar, nesse caso, que o campo de radiação resultante é a soma dos campos de cada partícula

$$E_{rad} = \sum_i \frac{q_i}{c^2} \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{v}_i)}{R_i} \quad \text{eq. 29}$$

- Para um observador distante, $R_i \sim R$ e a eq. 29 pode ser reescrita como:

$$E_{rad} = \sum_i \frac{1}{c^2} \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times q_i \dot{v}_i)}{R} \quad \text{eq. 30}$$

$$E_{rad} = \frac{1}{c^2} \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \sum_i q_i \dot{v}_i)}{R}$$

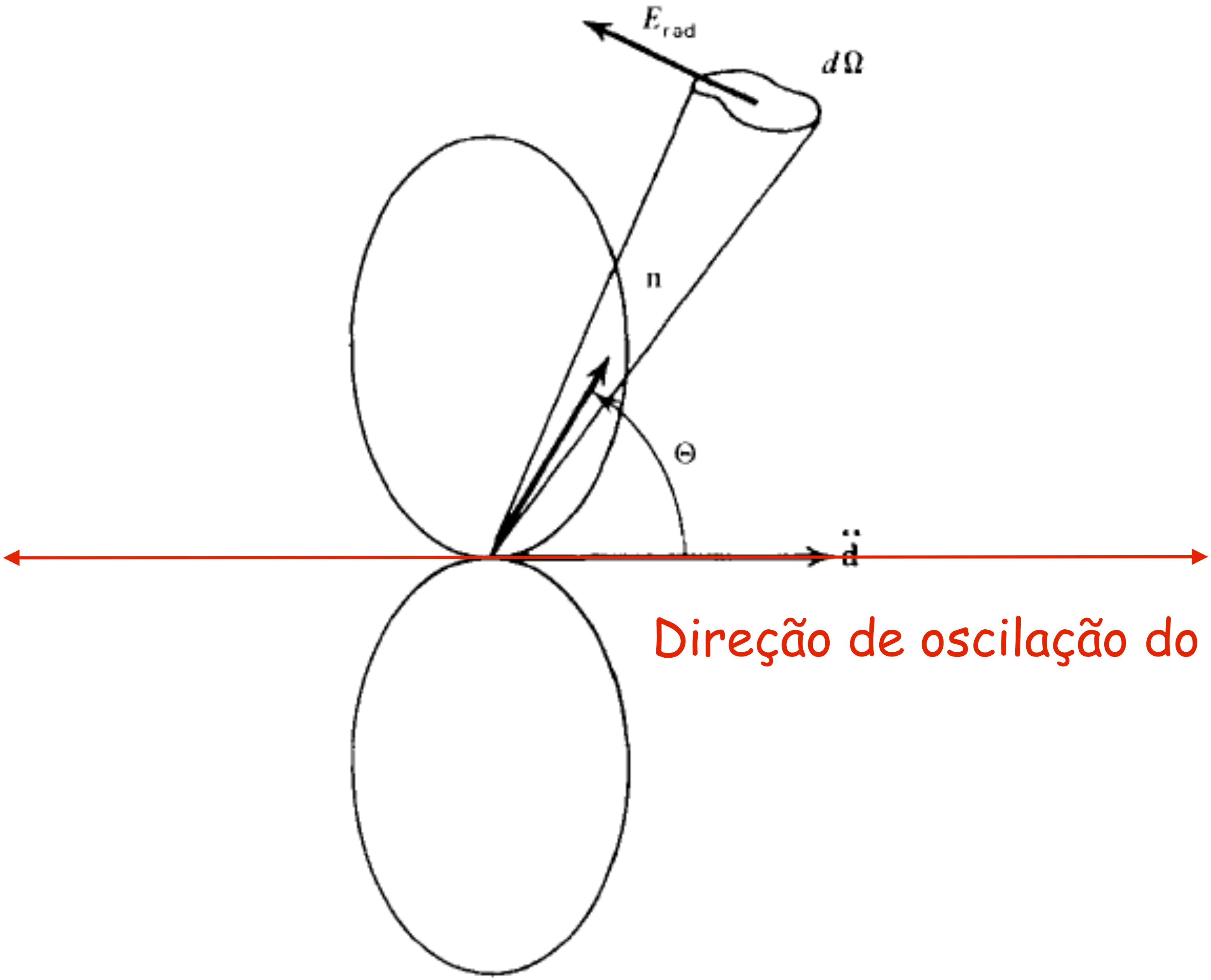
$$E_{rad} = \frac{1}{c^2} \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \ddot{d})}{R} \quad \text{eq. 31}$$

Aproximação de dipolo

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} sen^2\theta \\ P &= \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3} \end{aligned}}$$

eq. 33

Momento de dipolo $\boxed{d = \sum_i q_i \vec{r}_i}$ eq. 32



Direção de oscilação do dipolo

O espectro de radiação

- Usando o par de Fourier para o momento de dipolo:

$$d(t) = \int_{\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\hat{d}(\omega)d\omega$$ **eq. 34**

- Obtemos as relações

$$\ddot{d}(t) = \int_{\infty}^{+\infty} \omega^2 \hat{d}(\omega)d\omega$$ **eq. 35a**

$$\hat{E}(\omega) = -\frac{1}{c^2 R_0}\omega^2 \hat{d}(\omega) sen\theta$$ **eq. 35b**

28

O espectro de radiação

- E, usando as eqs. 35a e 35b e a definição de potência, podemos calcular a energia por unidade de ângulo sólido por intervalo de frequência e a energia total por unidade de frequência

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{c^3}\omega^4|\hat{d}(\omega)|^2 sen^2\theta \qquad \text{eq. 36}$$

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3}|\hat{d}(\omega)|^2 \qquad \text{eq. 37}$$

- **Detalhe: o espectro da radiação emitida está diretamente relacionado com as frequências de oscilação do momento de dipolo, o que não acontece quando as partículas encontram-se no regime relativístico!**