



Espalhamento Compton

Carlos Alexandre Wuensche
Processos Radiativos I

Introdução

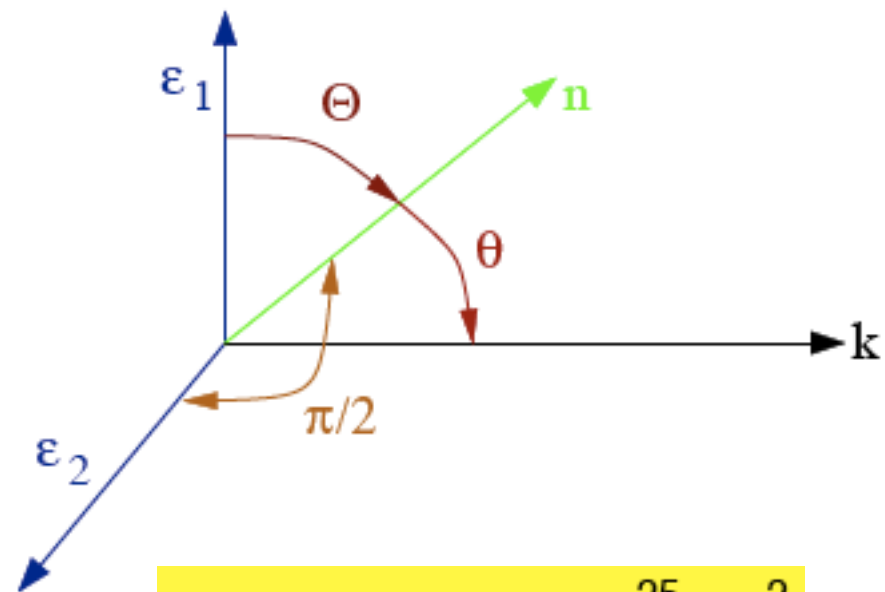
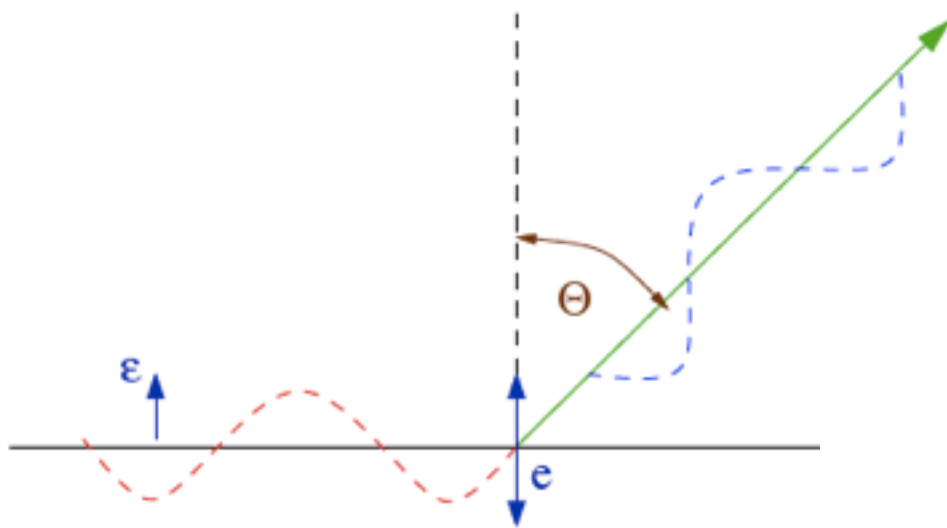
- Trataremos do processo de Comptonização: o espalhamento "inverso" de fótons de baixa energia por espalhamento Compton inverso em um gás de elétrons quentes.
- Cenário astrofísico principal:
 - Candidatos a buracos negros Galácticos
 - Núcleos ativos de galáxias
 - Meio quente intra-aglomerado
- Elétron relativístico com fator de Lorentz γ aumenta a energia do foton por um fator γ^2 .



Introdução

- Modificação do espectro de fótons devido a espalhamentos múltiplos (IC - Compton Inverso): Comptonização
- Síncrotron Auto-Compton (synchrotron self-Compton - SSC): elétrons energéticos em nebulosas, sujeitos a campos magnéticos intensos emitem radiação síncrotron. Os fótons síncrotron interagem com os elétrons que os criaram e são espalhados via efeito Compton inverso para energias mais altas.
- Elétrons térmicos ($T \sim 10^7 - 10^8$ K) no interior de aglomerados de galáxias espalham fótons da Radiação Cósmica de Fundo (RCFM) causando uma distorção na curva de corpo negro conhecida como efeito Sunyaev-Zeldovich (S-Z) effect.

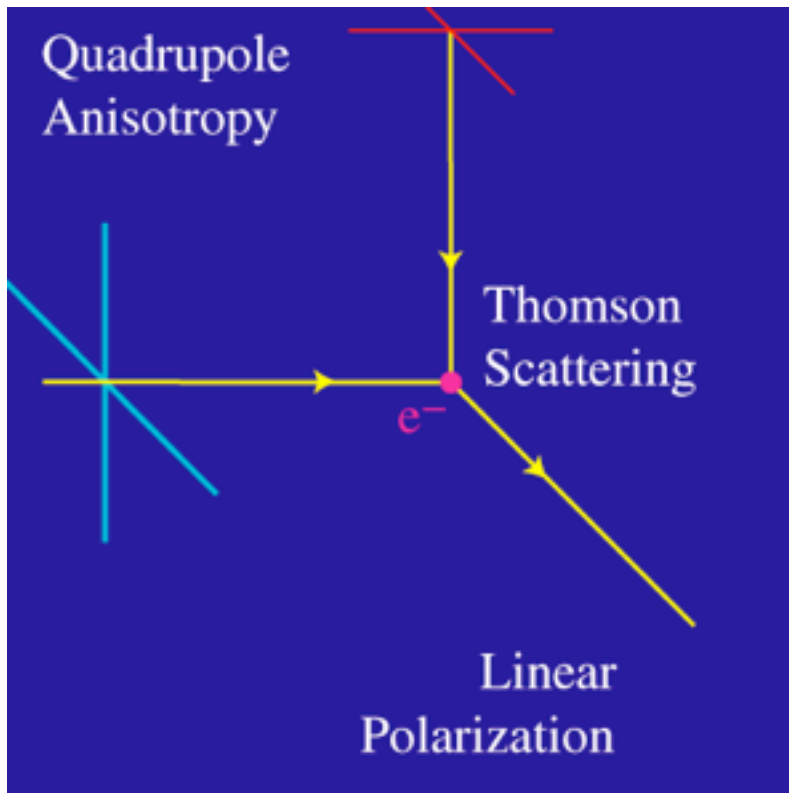
Polarização (de novo...)



$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

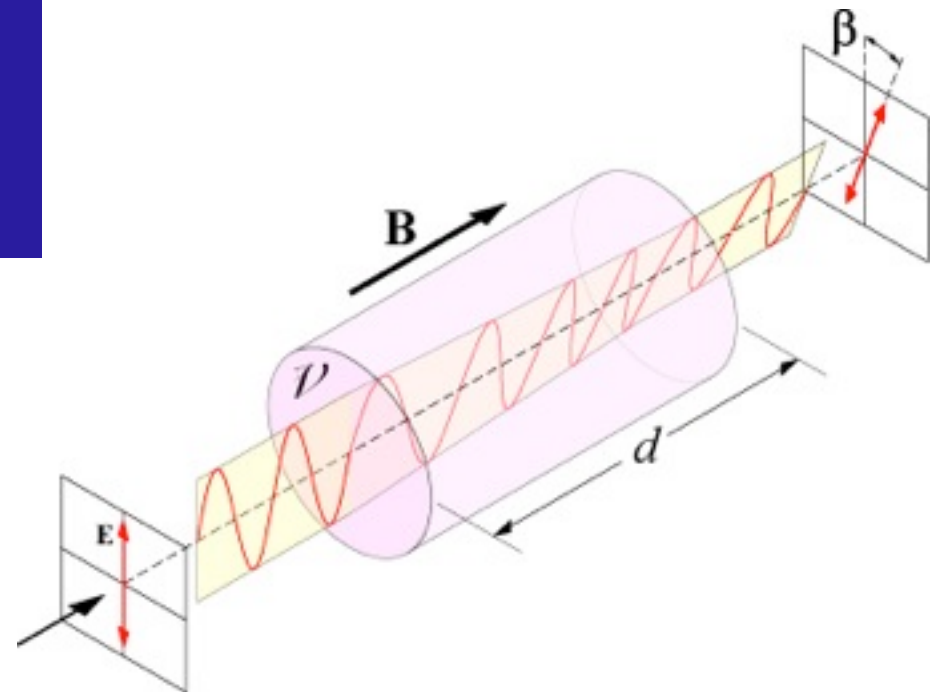
$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 =: \sigma_T$$

$$\sigma_T = 6.652 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$



Seção de choque para espalhamento Thomson

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} |\epsilon_i \times \epsilon_j|^2$$

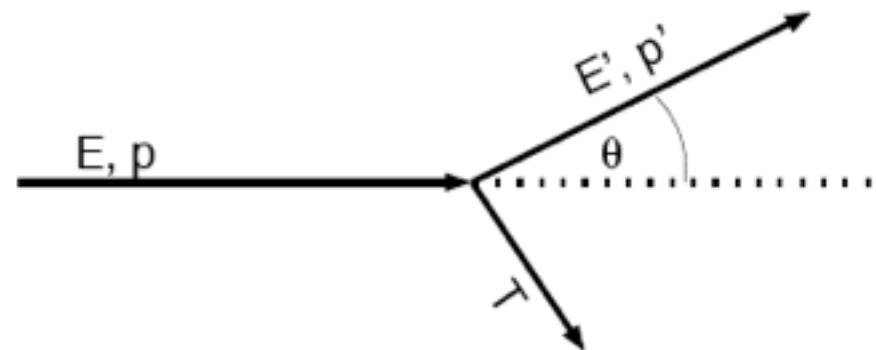


$$\beta = RM\lambda^2$$

$$RM = \frac{e^3}{2\pi m^2 c^4} \int_0^d n_e B ds$$

Espalhamento Compton

- Caso clássico \rightarrow não há variação dos comprimentos de onda inicial e final... **MAS**
- Fóton muda de direção \rightarrow mudança de momentum \rightarrow mudança de energia
- Caso quântico \rightarrow mudança de energia e comprimento de onda



$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

$$\sim E \left(1 - \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \right)$$

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

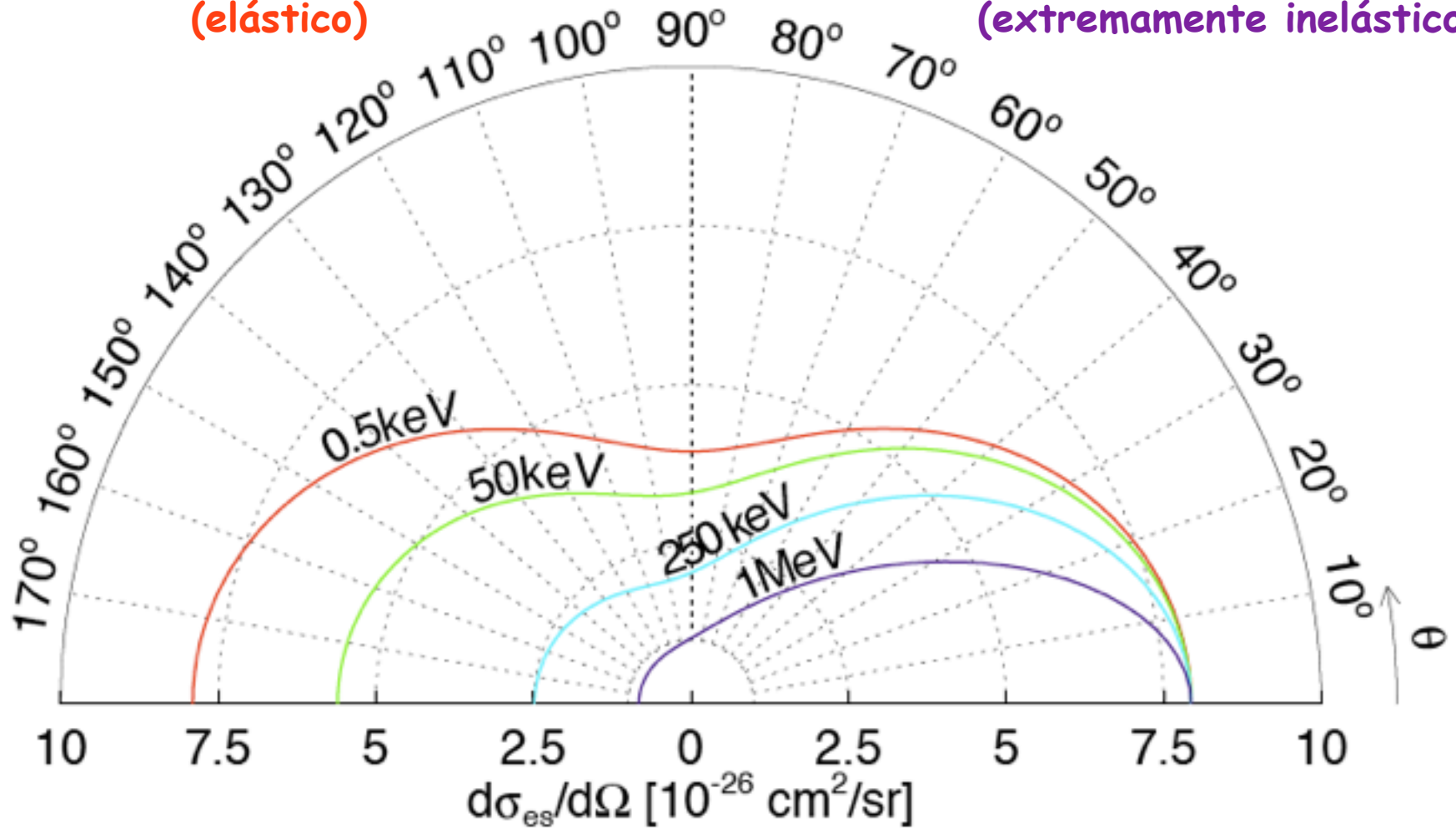
Para $E \ll m_e c^2$ pode-se fazer uma média em torno de θ e o espalhamento é aproximadamente isotrópico (praticamente 100% elástico) \rightarrow não há mudança na energia do fóton, visto no referencial de repouso do elétron

$$\frac{\Delta E}{E} \approx -\frac{E}{m_e c^2}$$

Para $E = 6,4 \text{ keV}$, $\Delta E = 0,2 \text{ keV}$

**Espalhamento Thomson
(elástico)**

**Espalhamento Compton
(extremamente inelástico)**





Seções de choque

- Efeitos quânticos na seção de choque tradicional levam à fórmula de Klein-Nishina
- Efeito principal: reduzir a seção de choque de seu valor clássico à medida que a energia do fóton cresce

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} &= \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{E_1}{E}\right)^2 \left(E/E_1 + E_1/E - \text{sen}^2\theta\right) \\ &= \frac{3}{16\pi} \sigma_T \left(E/E_1 + E_1/E - \text{sen}^2\theta\right)\end{aligned}$$

- A seção de choque total para espalhamento Compton é obtida integrando-se em $d\Omega$ (Klein-Nishina):

$$\sigma = \sigma_T \cdot \frac{3}{4} \left[\frac{1+x}{x^3} \left\{ \frac{2x(x+1)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right\} + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right]$$

- No regime não relativístico ($x \ll 1$): $x \equiv \frac{h\nu}{mc^2}$

$$\sigma \approx \sigma_T \left(1 - 2x + \frac{26x^2}{5} + \dots \right)$$

- E no regime ultra-relativístico ($x \gg 1$):

$$\sigma = \frac{3\sigma_T}{8} \frac{1}{x} \left(\ln(2x) + \frac{1}{2} \right)$$



Transferência de energia: espalhamento por elétrons em movimento

- Para energias não-relativísticas, usamos as expressões anteriores, transportamos, via transf. de Lorentz, o fenômeno para o referencial do elétron ($v = 0$)

$$E_{e\text{letr}} = E_{lab} \gamma (1 - \beta \cos \theta)$$

- Calculamos o espalhamento
- Transportamos de volta o problema para o referencial do laboratório

$$E'_{lab} = E'_{e\text{letr}} \gamma (1 + \beta \cos \theta)$$



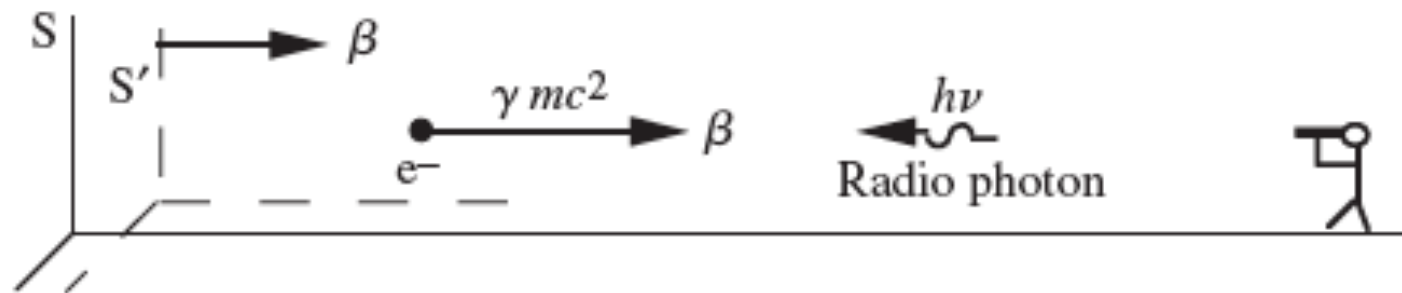
Logo, no caso relativístico, $\beta=1$ e $\theta=\theta'=\pi/2$ e teremos

$$E_{lab'} \approx 2\gamma^2 E'_{lab}$$

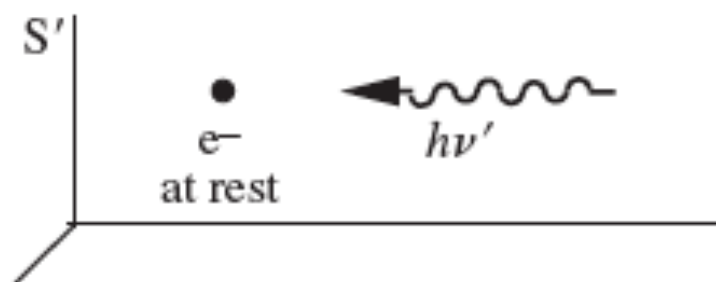
Transferência de energia extremamente eficiente no limite Thomson. No caso de energias mais altas, efeitos quânticos diminuem a eficiência do processo, tanto reduzindo a possibilidade de espalhamento e tornando $E' < E$ na seção de choque de Klein Nishina



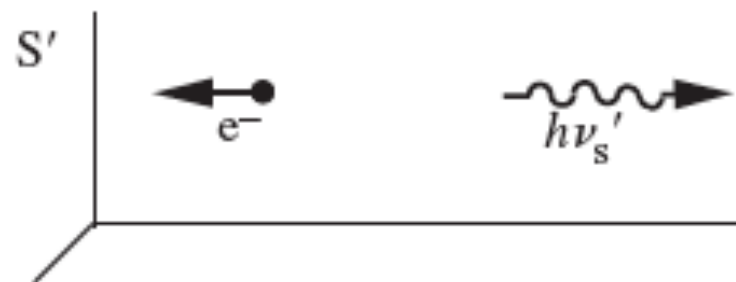
(a) Before collision in S



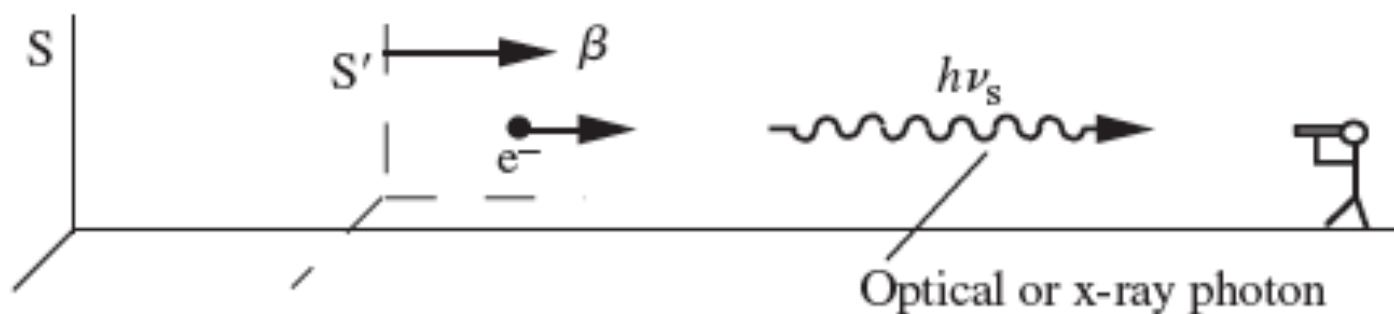
(b) Before collision in S'



(c) After collision in S'



(d) After collision in S



Potência emitida por um único e^-

- Olhamos o caso de um único espalhamento num meio **opticamente fino**, para que a radiação possa ser vista. A potência total emitida no sistema de repouso do elétron é dada por:

$$\left. \frac{dE'_{\text{FoR}}}{dt_{\text{FoR}}} \right|_{\text{em}} = \int c \sigma_T E'_{\text{FoR}} V'(E'_{\text{FoR}}) dE'_{\text{FoR}}$$

- $V'(E')$ é a densidade de energia dos fóton. $V(E)$ está relacionada à densidade no espaço de fase:

$$V(E) dE = n(p) d^3p$$

Invariante de Lorentz!

$$\frac{V_{lab}(E_{lab})dE_{lab}}{E_{lab}} = \frac{V_{e^-}(E_{e^-})dE_{e^-}}{E_{e^-}}$$

- No limite de Thomson, a variação de energia do elétron é pequena e $E'_{e^-} = E_{e^-}$
- Como a potência **TAMBÉM** é um invariante de Lorentz:

$$\frac{dE_{lab}}{dt} = \frac{dE_{e^-}}{dt}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{lab}}{dt} \Big|_{em} &= c\sigma_T \int E_{eletr}^2 \frac{V_{eletr} dE_{eletr}}{E_{eletr}} \\ &= c\sigma_T \int E_{eletr}^2 \frac{V_{lab} dE_{lab}}{E_{lab}} \end{aligned}$$

e, fazendo a transformação de Lorentz para o sistema do elétron:

$$= c\sigma_T \gamma^2 \int (1 - \beta(\cos)\theta)^2 E_{lab} V_{lab} dE_{lab}$$



Fazendo a média espacial sobre os ângulos (distr. "isotrópica") temos $\langle \cos \theta \rangle = 0$, $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/3$, logo:

$$= c\sigma_T \gamma^2 \int \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right) U_{rad}$$

$$U_{rad} = \int E V(E) dE$$



Para determinar o ganho líquido do campo de fótons, é necessário subtrair a potência irradiada sobre o elétron

$$\frac{dE_{lab}}{dt} \Big|_{inc} = c\sigma_T \int EV(E)dE = c\sigma_T U_{rad}$$

• E como $\gamma^2 - 1 = \gamma^2\beta^2$, a potência líquida do campo de fótons é dada por:

$$\begin{aligned} P_{compt} &= \frac{dE_{lab}}{dt} \Big|_{em} - \frac{dE_{lab}}{dt} \Big|_{inc} \\ &= \frac{4}{3}\sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_{rad} \end{aligned}$$



$$P_{sinc} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta_{\perp}^2 U_B$$

$$\frac{P_{sinc}}{P_{Comp}} = \frac{U_B}{U_{\gamma}}$$

$$P_{Comp} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{rad}$$

- Consequencia (QED): emissão sincrotron equivale ao espalhamento Compton inverso de fótons virtuais pelos campos magnéticos dos objetos emissores... não precisa dos elétrons para essa descrição!
- Se $U_{rad} > U_B$, $P_{comp} > P_{sinc} \rightarrow$ campo de fótons será MUITO amplificado \rightarrow eficiente para cortar a emissão sincrotron e resfriar os elétrons por efeito Compton inverso (**catástrofe Compton**).
- Consequência: T_b de fontes rádio limitada a $\sim 10^{12}$ K.

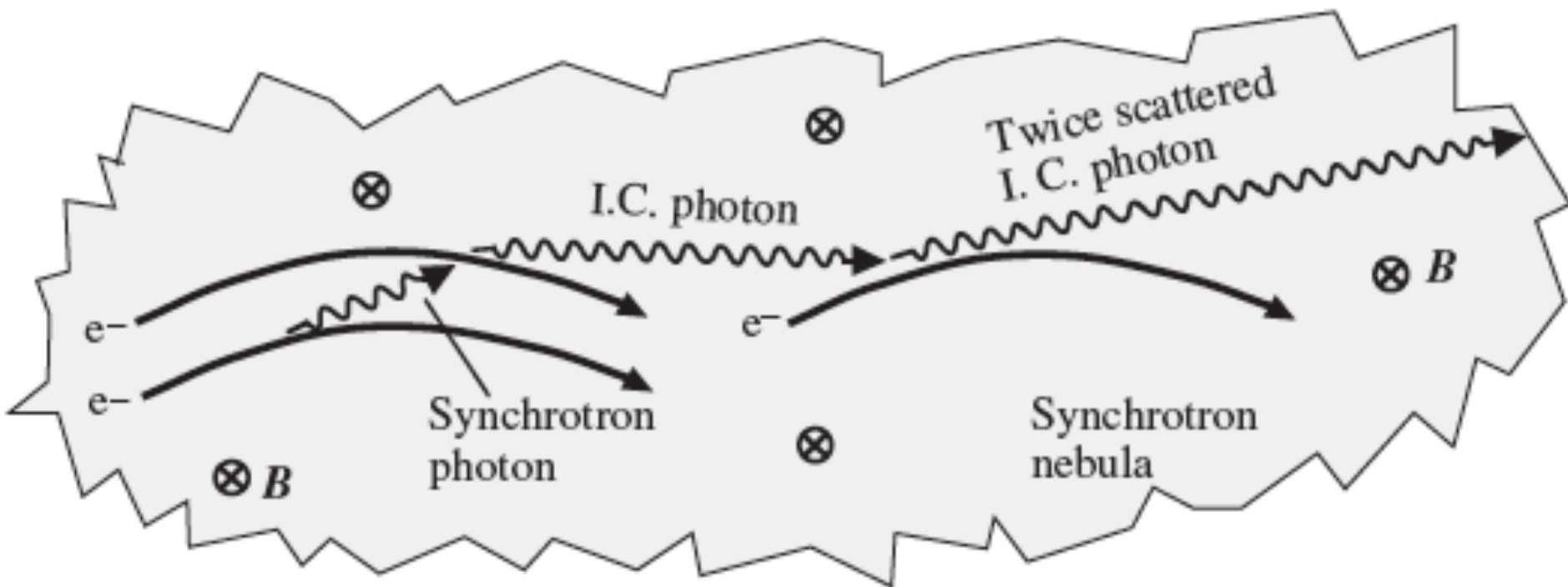


Fig. 9.4: Synchrotron self-Compton (SSC) process in a nebula with magnetic field B pointed into the page. Synchrotron photons are emitted by energetic electrons, resulting in a high-radiation energy density in the nebula. The photons then undergo inverse Compton (IC) scattering to high energies by the same electrons that give rise to the synchrotron photons. If the probability of a second IC scatter (as shown) becomes significant, the electron energy is rapidly depleted.

Espalhamento Compton inverso por um único elétron

- Dependência com a distribuição de energia dos elétrons e com o espectro de energia dos fótons incidentes
- Caso particular: distribuição isotrópica para fótons e elétrons → fótons espalhados também terão distribuição isotrópica, restando calcular seu espectro de energia
- O cálculo é feito inicialmente no sistema de referência do elétron, usando a intensidade em função do no. de fótons, em vez da energia



No caso não relativístico ($\gamma \ll 1$), a função de emissão (conforme o R&L), ou emissividade é dada por:

$$j(E_f) = \frac{3N\sigma_T F_0}{4\gamma^2 E_i \beta^2} \left\{ \begin{array}{ll} (1 + \beta) \frac{E_f}{E_i} - (1 - \beta), & \rightarrow \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} < \frac{E_f}{E_i} < 1 \\ (1 + \beta) - \frac{E_f}{E_i} (1 - \beta), & \rightarrow 1 < \frac{E_f}{E_i} < \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} < \\ 0, & \rightarrow \text{no restante dos casos} \end{array} \right\}$$

- N é a densidade do feixe de elétrons, F_0 é o número de fótons/unid. tempo unid. área unid. steradianos, E_i e E_f são as energias inicial e final dos fótons, γ é o fator de Lorentz.



No caso ultrarelativístico ($\gamma \gg 1$), a emissividade é dada por:

$$j(E_f) = \frac{3N\sigma_T F_0}{4\gamma^2 E_i} f_{iso}(x)$$

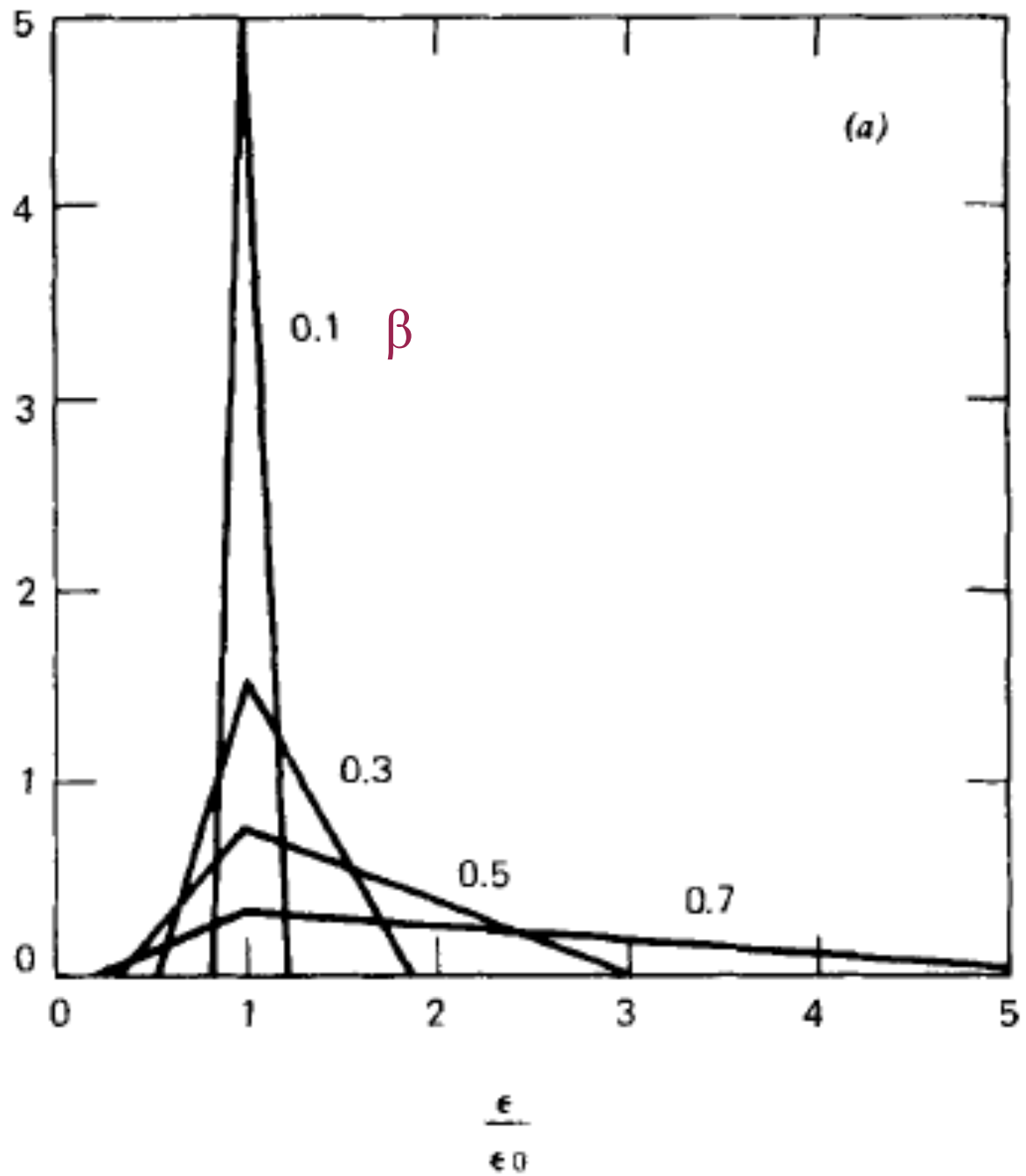
$$f_{iso}(x) \equiv \frac{2}{3}(1 - x), \quad x = \frac{E_f}{4\gamma^2 E_i}$$

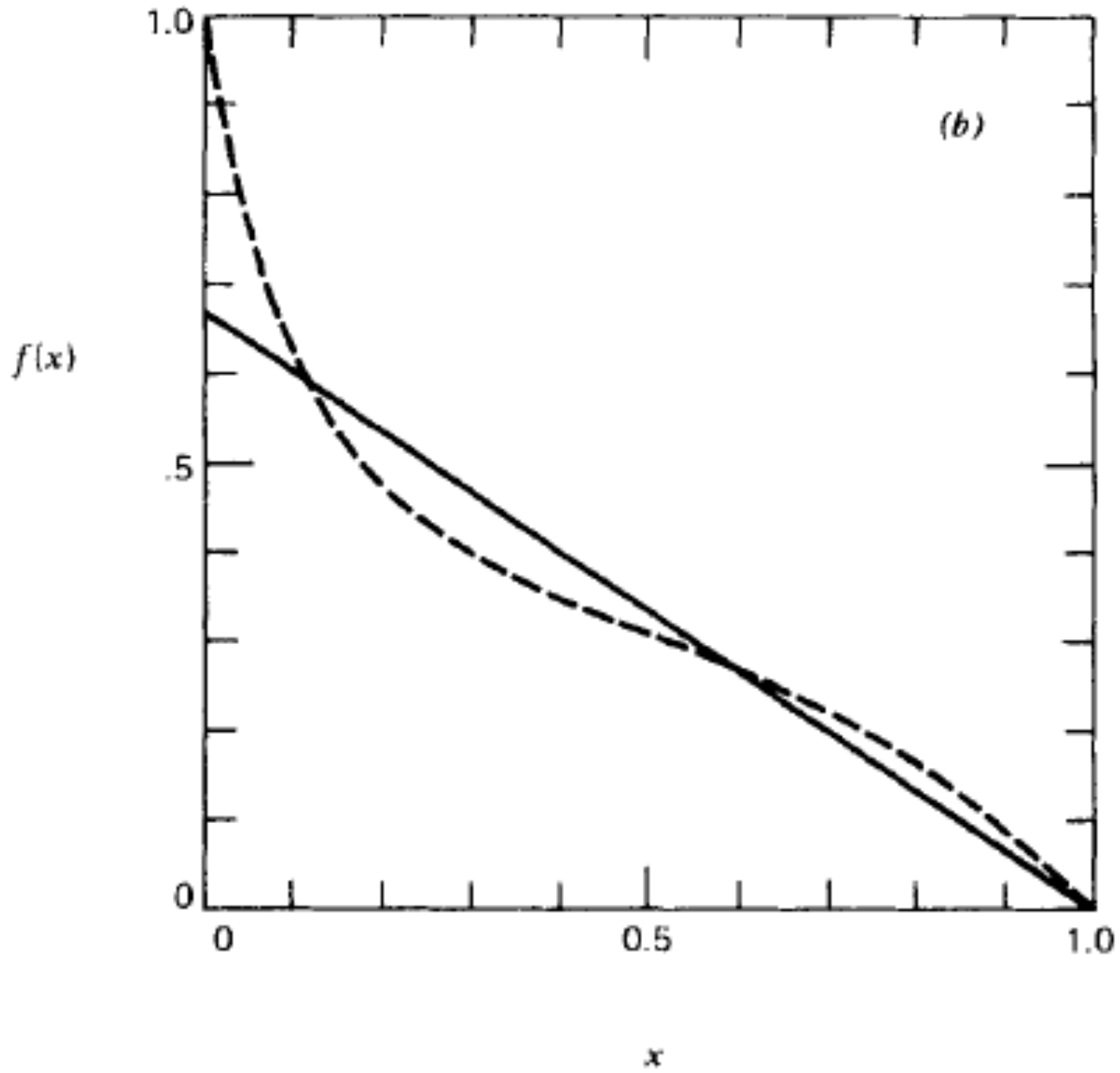
Caso não isotrópico

$$f(x) = 2x \ln(x) + x + 1 - 2x^2$$



$$\frac{\epsilon_0}{N\sigma_T F_0} j(\epsilon)$$





Espectro devido ao espalhamento Compton

- Distribuição inicial de elétrons $\propto E^{-p}$
- Potência total por energia por volume é dada por:

- $$\frac{dE}{dV dt dE_f} = 4\pi E_f j(E_f)$$



● Pode-se mostrar que (R&L, sec. 7.3):

$$\frac{dE}{dV dt dE_f} = \pi cr_0^2 C A(p) E_f^{-(p-1)/2} \int dE E^{(p-1)/2} v(E)$$

● em que

$$A(p) \equiv 2^{p+1} \int_0^\infty dx x^{(p-1)/2} f(x) = 2^{p+3} \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2 (p+5)(p+1)}$$

● Note o índice espectral $s=(p-1)/2$ para a distribuição de energias dos fótons!!!

Transferência de energia por espalhamentos repetidos

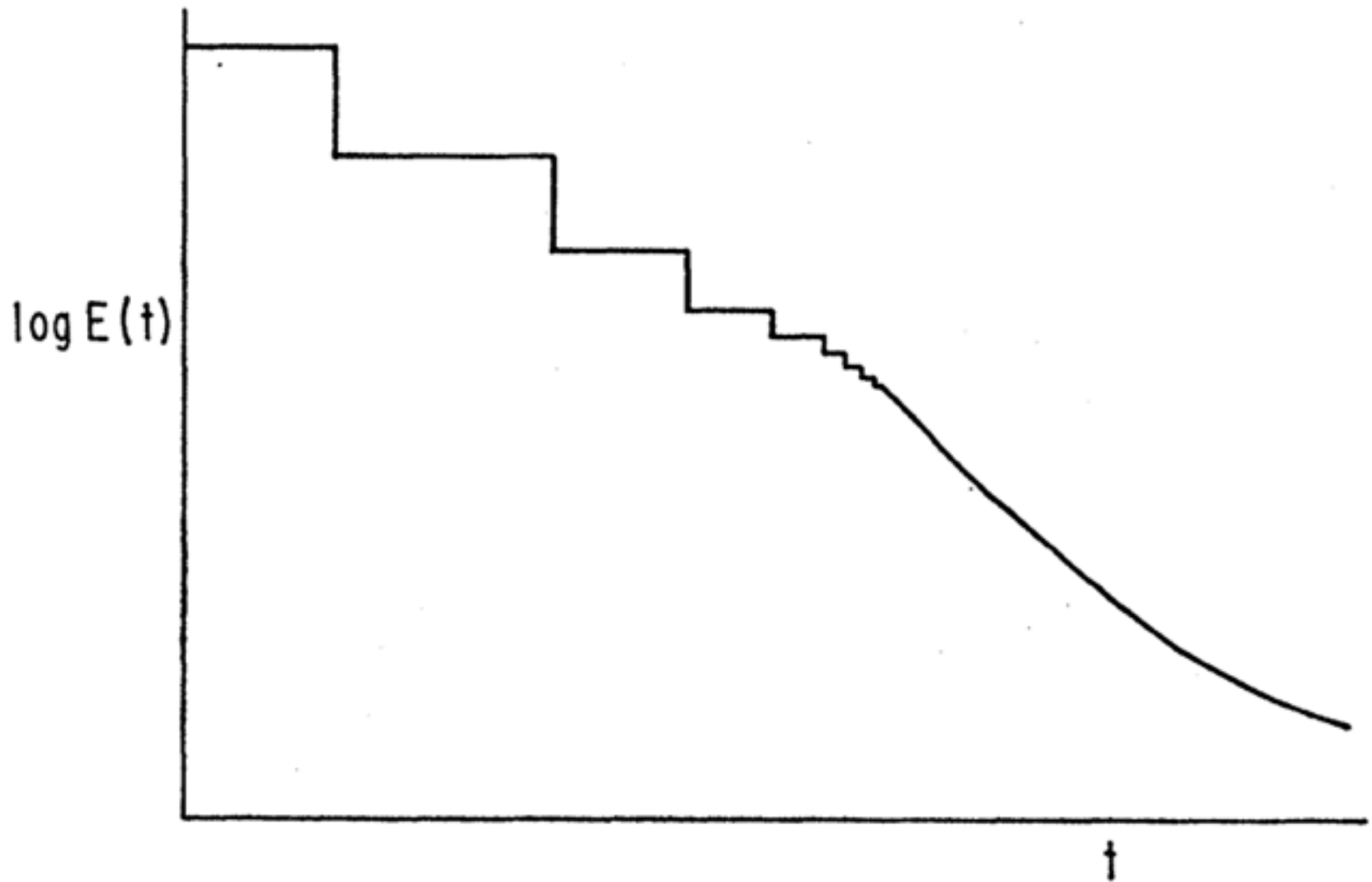
- Quais as condições que levam os processos de espalhamento a alterar significativamente a energia total dos fótons?
- Condição de análise: $\gamma \epsilon \ll mc^2$
- No sistema de referência dos e^- , devemos ter:

Ainda indeterminado...

$$\frac{\Delta E'}{E'} \equiv \frac{E'_1 - E'}{E'} \approx \frac{E'}{m_e c^2} \quad \frac{\Delta E}{E} = -\frac{E}{m_e c^2} + \frac{\alpha \kappa T}{m_e c^2}$$

$$E_1 \gg E$$

No referencial do laboratório, existe uma componente devida à distribuição Maxwelliana



Esquema das perdas sucessivas de energia sofridas por um elétron devido a espalhamento Compton inverso



- Em eq. termodinâmico, a interação entre fótons e elétrons só ocorre via espalhamento, sem troca energética.
- Supomos também que, devido à baixa densidade de fótons, efeitos de emissão estimulada são desprezíveis.
- Fótons seguem uma distribuição de Bose-Einstein...
- Assim, usando a eq. (6.51) do R&L:

$$N(E) = K E^2 e^{-(E/kT)}$$



$$\langle E \rangle = \int E \frac{dN}{dE} dE / \int \frac{dN}{dE} dE = 3\kappa T$$
$$\langle E^2 \rangle = \int E^2 \frac{dN}{dE} dE / \int \frac{dN}{dE} dE = 12(\kappa T)^2$$

● Em equilíbrio, $\Delta E = 0$, logo $\alpha = 4$!

$$-\frac{E}{m_e c^2} + \frac{4\kappa T}{m_e c^2} \equiv A \quad \rightarrow \quad \text{Fator de amplificação}$$

$E < 4 \kappa T \Rightarrow$ fótons ganham energia, gás resfria

$E > 4 \kappa T \Rightarrow$ fótons perdem energia, gás esquenta

VÁLIDO NO REGIME DE ELÉTRONS NR!!!!

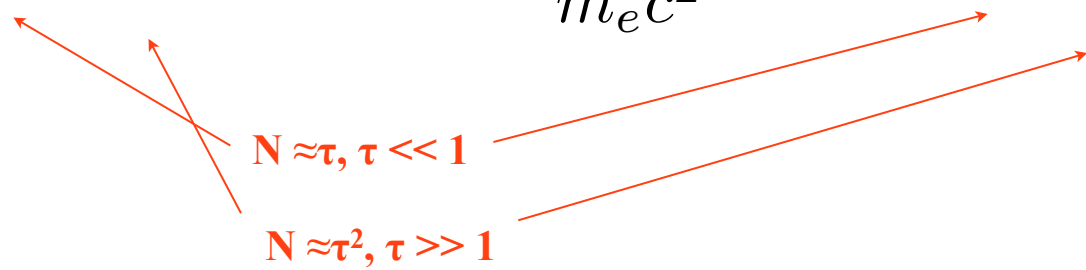
PARÂMETRO DE COMPTONIZAÇÃO

- Definimos a variação total de energia relativa dos elétrons, sofrida ao atravessar um meio quente ($E \ll kT_e$) cuja profundidade óptica é $\tau_e = n_e \sigma_T l$:

Variação relativa de energia = Variação relativa sofrida por espalhamentos \times no. médio de espalhamentos

- Parâmetro de Comptonização:

$$y_{NR} \equiv \frac{4\kappa T}{m_e c^2} \text{Max} (\tau_{es}, \tau_{es}^2) \quad y_R \equiv 16 \left(\frac{\kappa T}{m_e c^2} \right)^2 \text{Max} (\tau_{es}, \tau_{es}^2)$$





Espalhamentos sucessivos por elétrons não-relativísticos e a eq. de Kompaneets

- Eq. de Kompaneets: solução particular da eq. de Boltzmann \rightarrow eq. de difusão!
- Descreve o movimento de difusão dos fótons no espaço de fase
- Intrinsecamente não relativística

Eq. Kompaneets

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left(n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x} \right)$$

Recuo
Emissão estimulada
Efeito Doppler

● $n \rightarrow$ no. de ocupação dos fótons $n = I(E) \frac{hc^2}{8\pi E^3}$

● $x = E / kT$

● Parâmetro de Kompaneets (parâmetro de Comptonização) $y = \frac{4\pi T_e}{m_e c^2} \sigma_T N_e c t$

Solução

- O espectro de fótons pode ser obtido analiticamente resolvendo-se a eq. de Kompaneets. Entretanto, só existem soluções analíticas possíveis para casos especiais e geometrias simples. O caso mais comum é o da Comptonização não saturada
- Uma discussão completa com vários exemplos pode ser encontrada em Sunyaev e Tirtachuk (1980)

Soluções

Comptonização não saturada

$$I(x) \propto \left\{ \begin{array}{l} x^3 e^{-x} \\ x^{3-\Gamma} \end{array} \right\}$$

$$\Gamma = \frac{3}{2} \mp \sqrt{\frac{9}{4 + \frac{4}{y}}}$$

$y \gg 1 \rightarrow$ raiz -

$y \ll 1 \rightarrow$ raiz +

$y \sim 1 \rightarrow$ valor médio (3/2)



Espectro total "genérico"

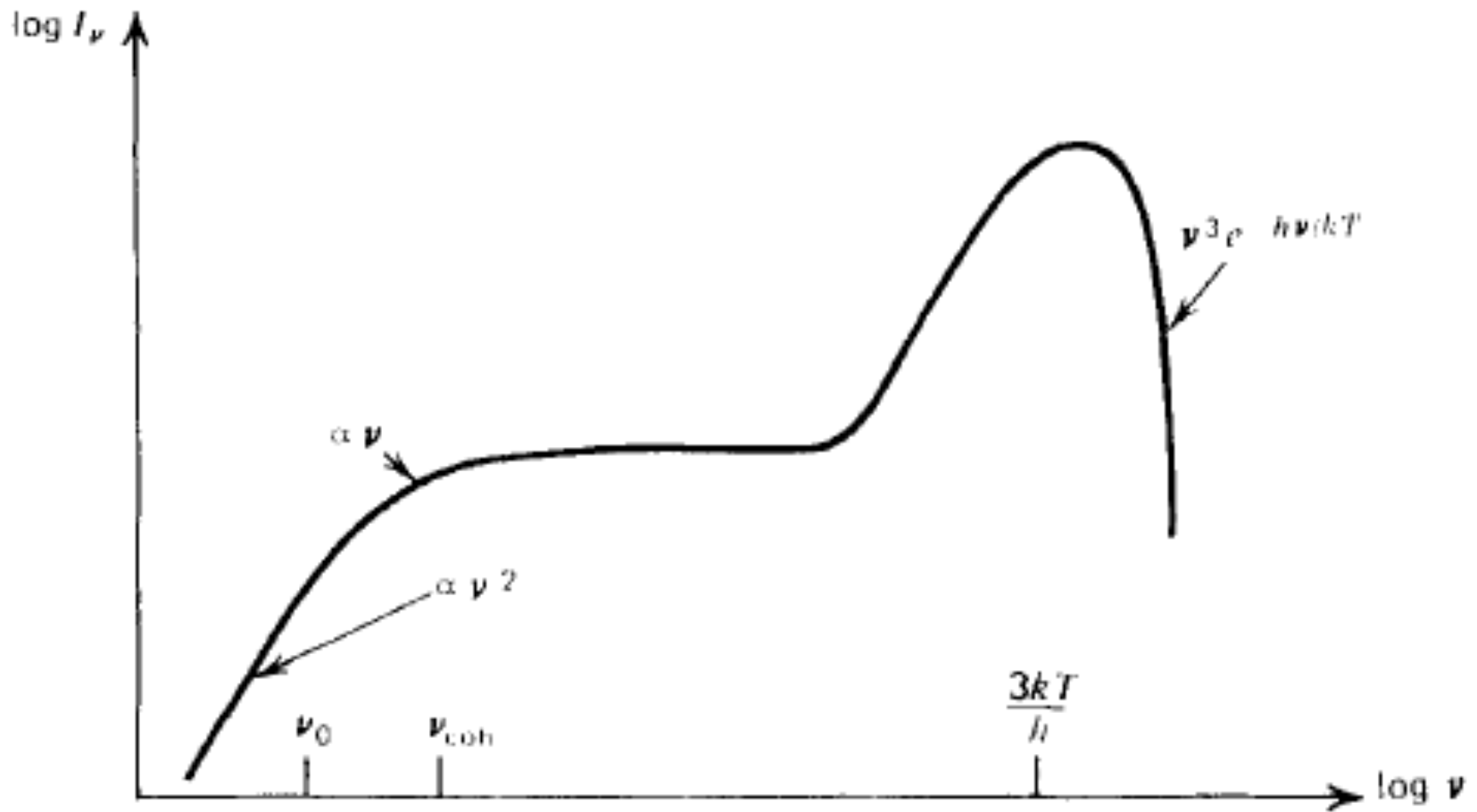


Figure 7.4 Spectrum from a thermal, nonrelativistic medium characterized by free-free emission and absorption and by saturated inverse Compton scattering. At low frequencies the spectrum is blackbody then becomes modified blackbody and, at high frequencies, becomes a Wien spectrum.

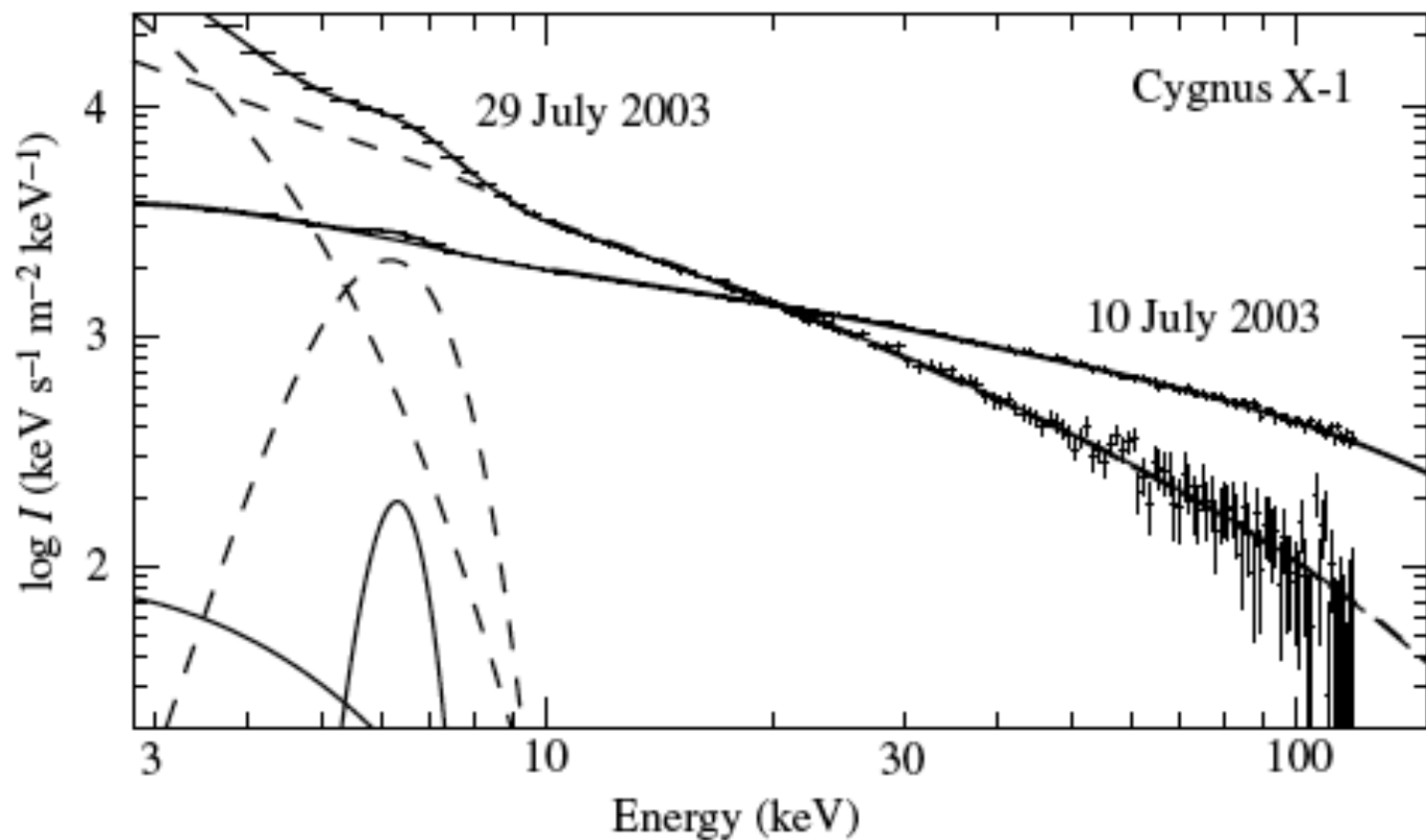


Fig. 9.3: Two x-ray spectra of the black-hole binary Cygnus X-1 on a log-log plot illustrating the extreme variability of the source. In the 29 July 2003 “soft” spectrum, the thermal (modified blackbody) peak is quite pronounced (hump in upper curve), whereas the power-law extending to high energies is much more pronounced in the 10 July 2003 “hard” spectrum. The spectra are modeled with the components shown as dashed (29 July) and solid (10 July) lines. [J. Wilms *et al.*, *A&A* **447**, 245 (2006)]

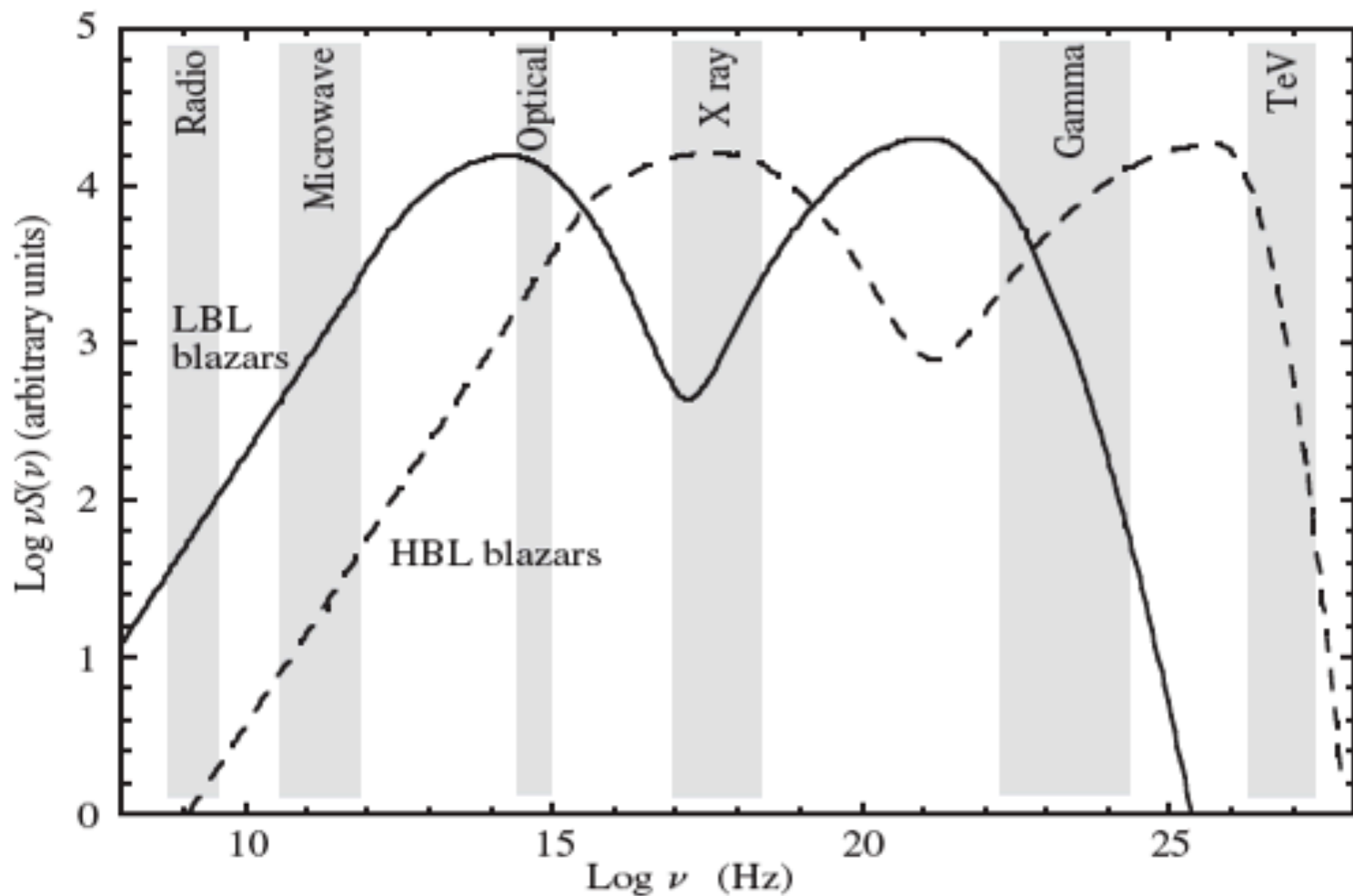


Fig. 9.5: Theoretical spectral energy distributions (SED) for blazars across the broad range of frequencies where observations of blazars are carried out (shaded areas). The two curves exhibit extremes of possible spectra (high and low energy) and illustrate the importance of observations across many wave bands. In the model, the lower frequency peak arises from synchrotron photons, and the higher frequency peak from IC-scattered photons in an SSC source that is hurtling at relativistic speed toward the observer. In an SED plot, a flat spectrum represents constant energy flux per fixed log interval (e.g., a decade of frequency). [P. Giommi *et al.*, *A&A* **445**, 843 (2006); courtesy S. Colafrancesco]

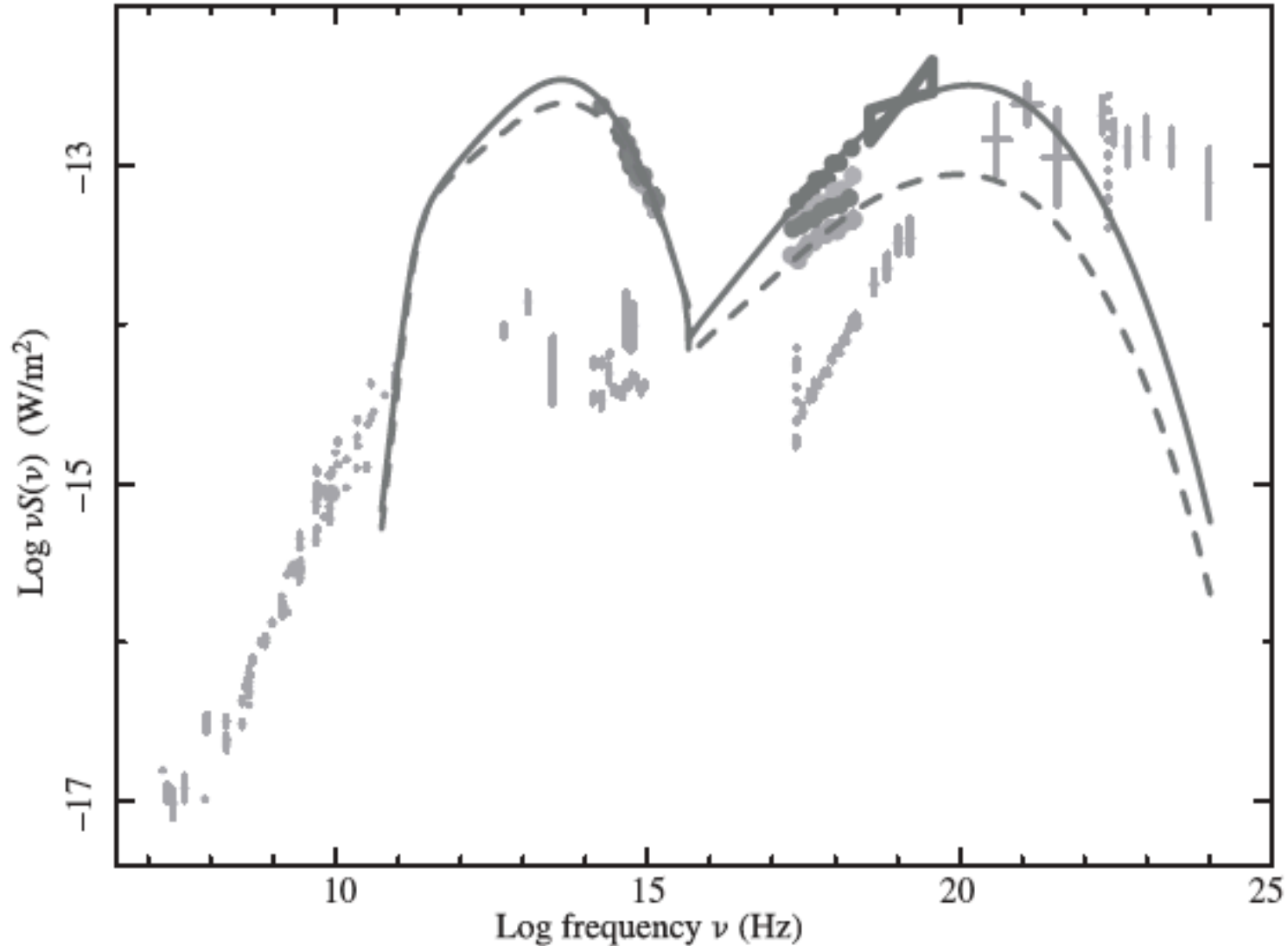
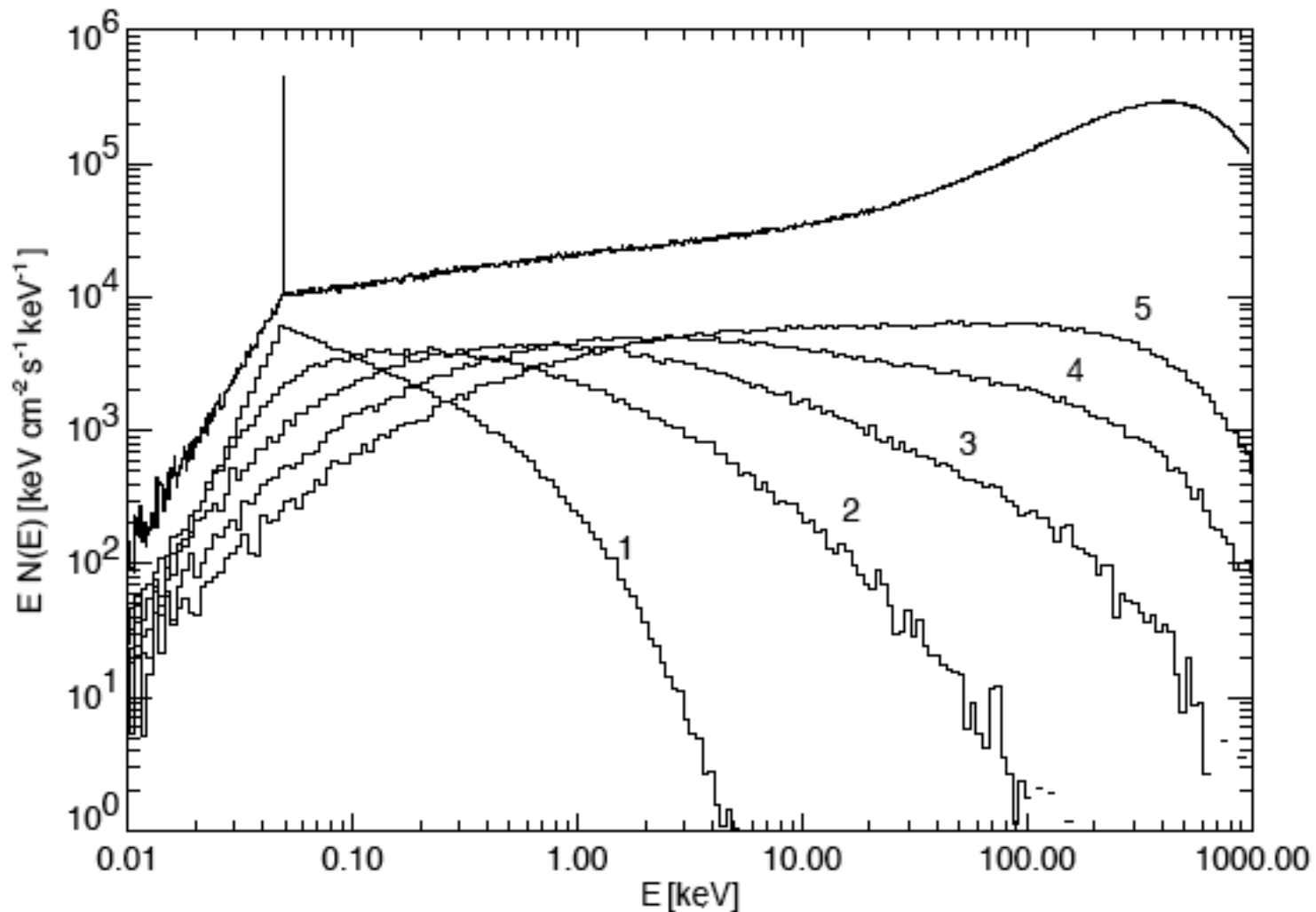
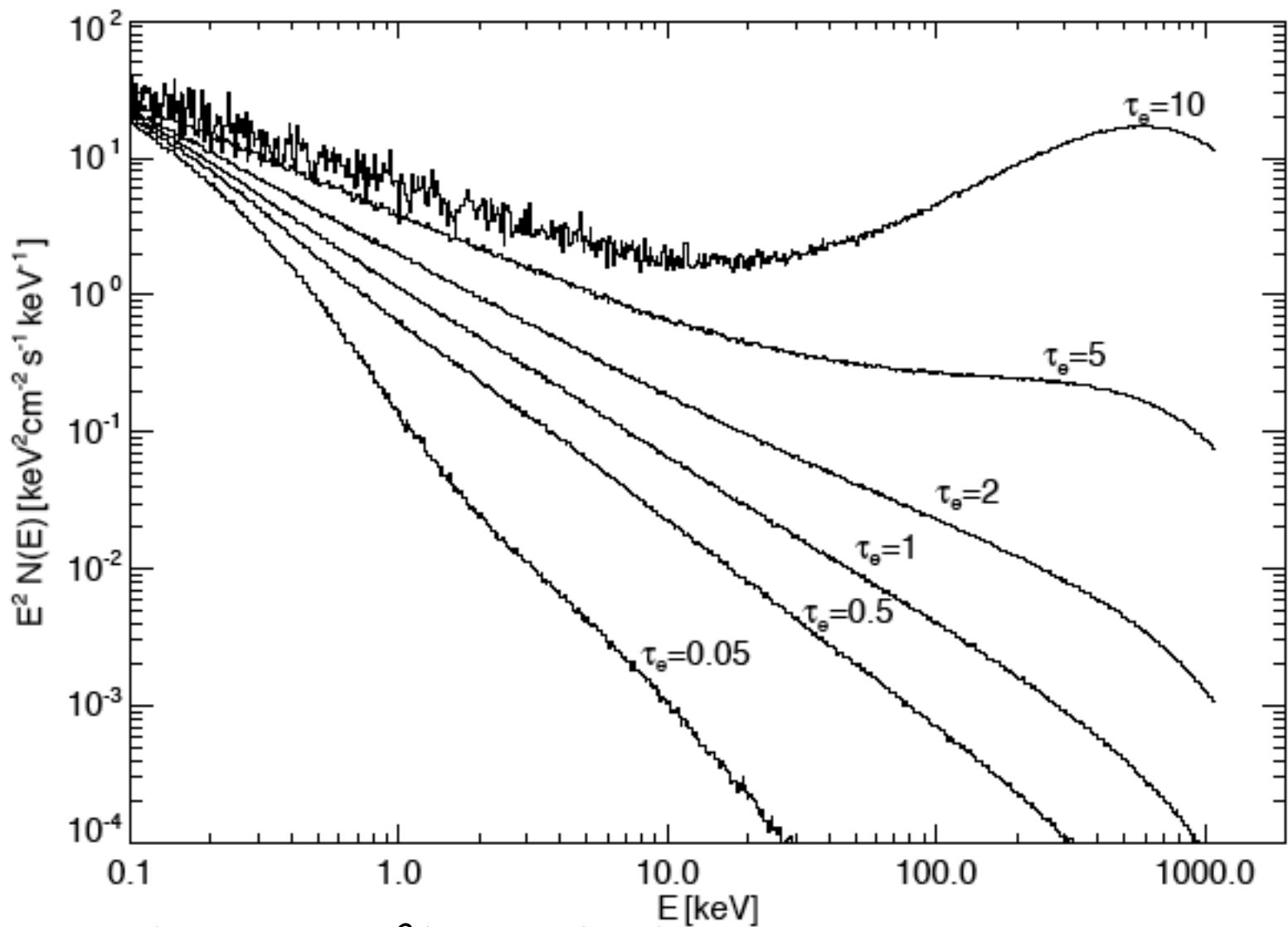


Fig. 9.6: Spectral energy distribution (SED) of blazar 3C454.3 over many wave bands from many observatories. The two-peaked character of Fig. 9.5 is clearly evident in the data and in the simple one-zone model fits shown as solid and dashed lines. The filled circles signify recent quasi-simultaneous subsets of radio, optical, x-ray, and gamma-ray data, the latter three being mostly from the Swift gamma-ray burst observatory. The smaller points represent nonsimultaneous observations in the literature. The data show large intensity variations across most frequency bands. [P. Giommi *et al.*, *A&A*, **456**, 911 (2006)]



Esfera com $\tau=5$, $kT_e=0,4 m_e c^2$ ($\sim 200 \text{ keV}$) fótons Compton vêm do centro da esfera

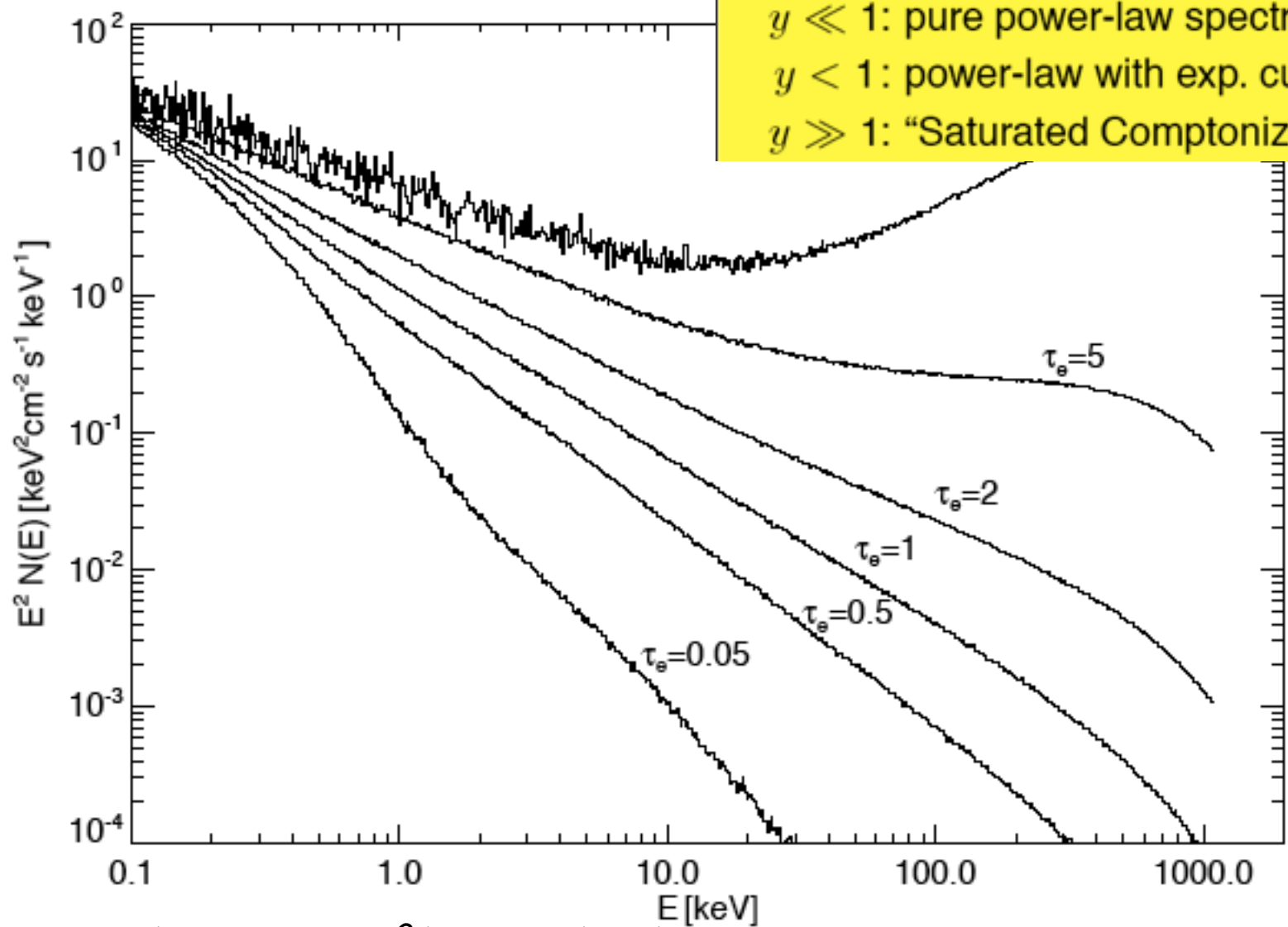
Espectro total é construído a partir dos diversos espalhamentos (no. de colisões dos fótons Compton antes de deixarem a nuvem)



Esfera com $kT_e = 0,7 m_e c^2 (\sim 360 \text{ keV})$

Fótons Compton vêm do centro da esfera

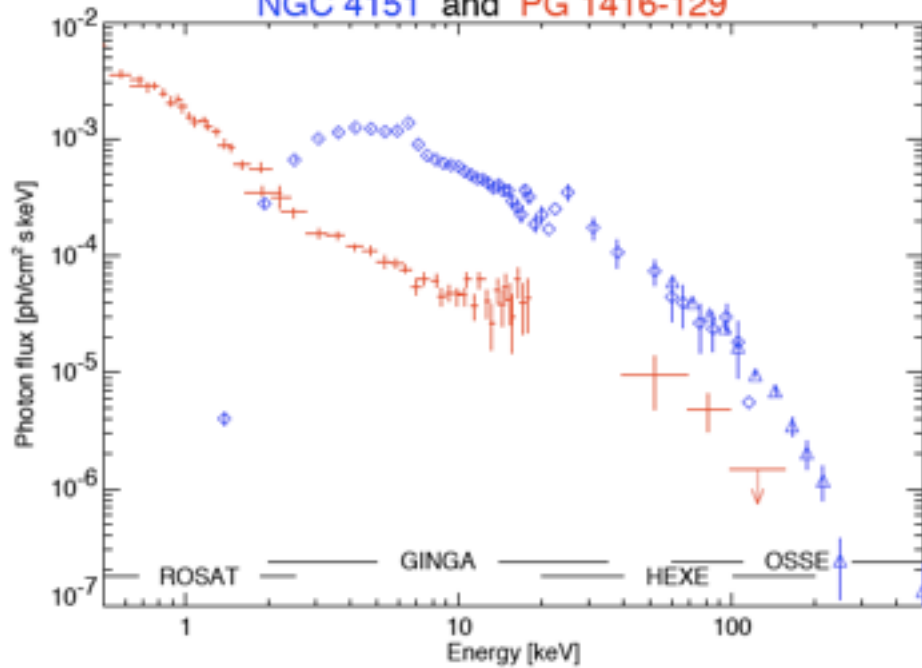
Comptonização saturada nunca foi observada!!!



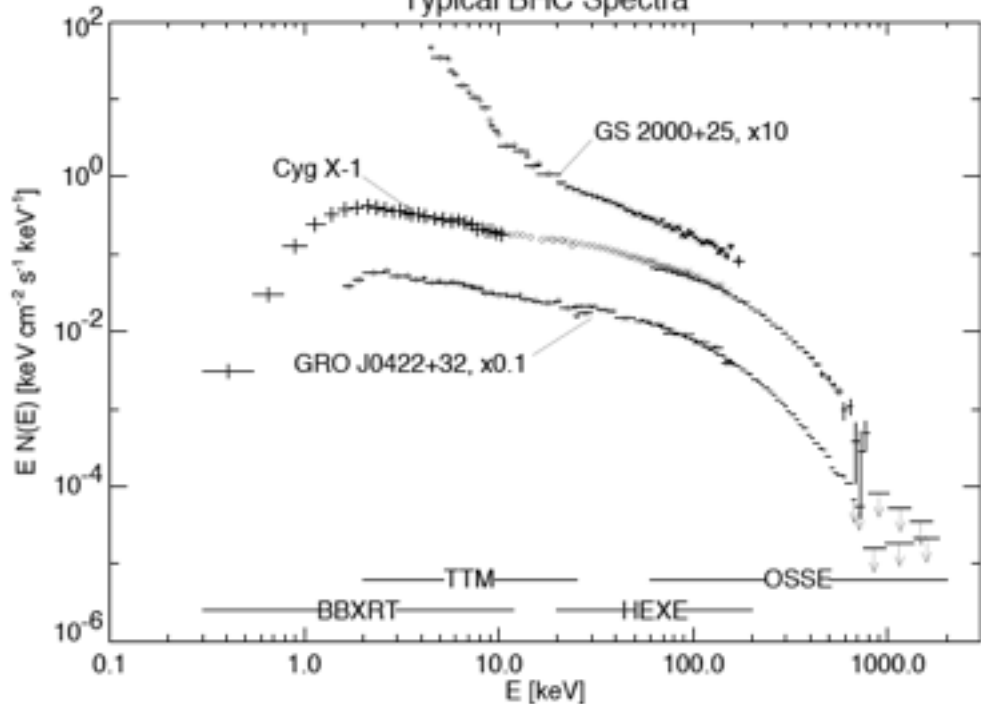
Esfera com $kT_e = 0,7 m_e c^2$ (~ 360 keV)
 Fótons Compton vêm do centro da esfera

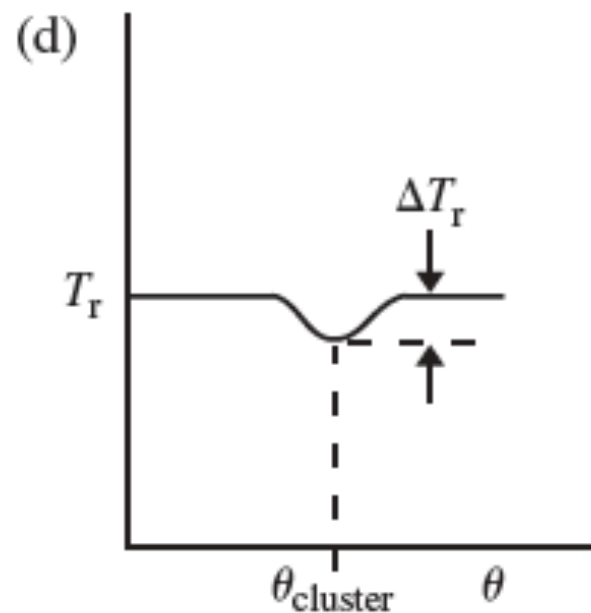
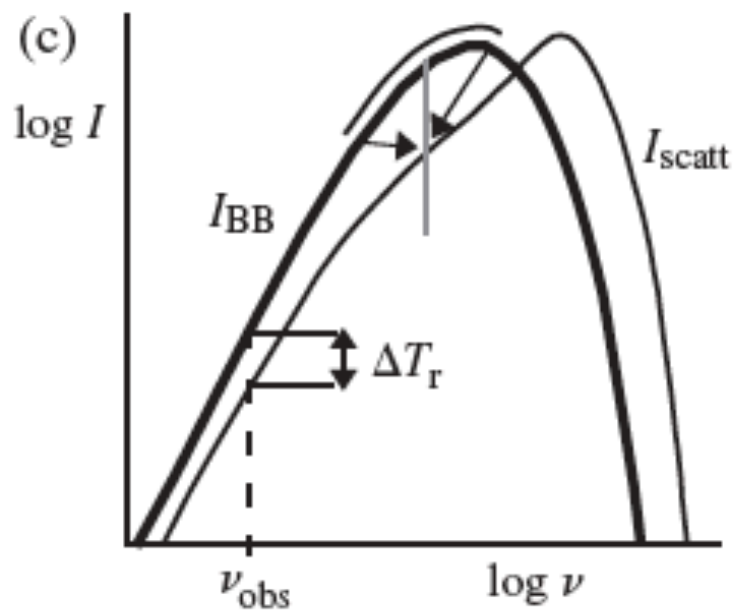
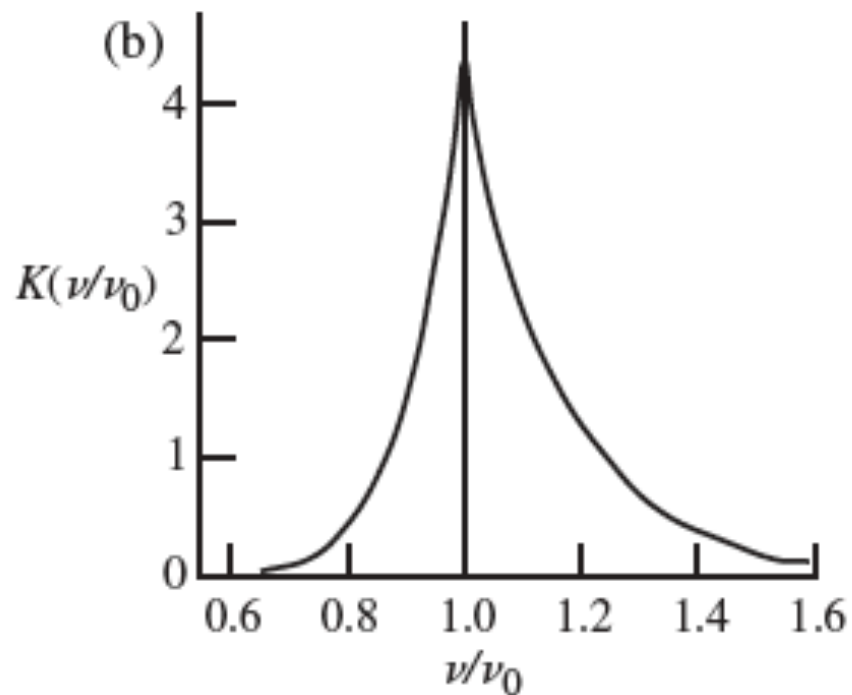
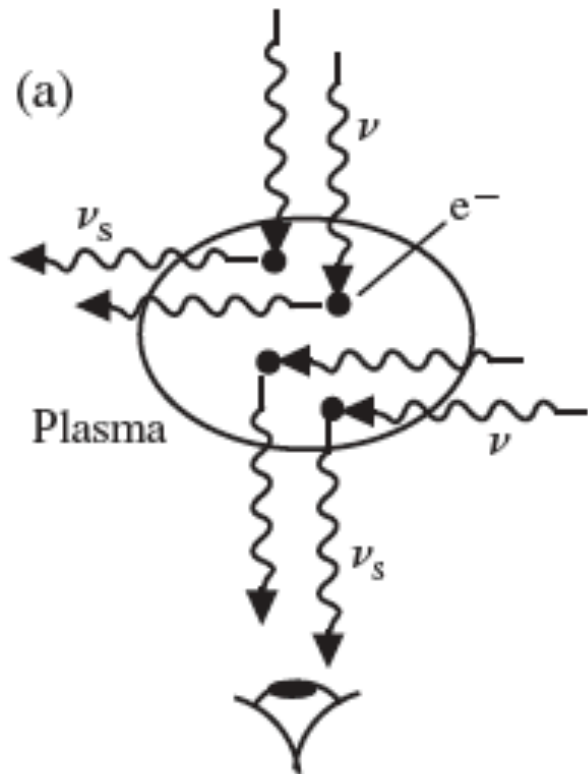
Comptonização saturada nunca foi observada!!!

NGC 4151 and PG 1416-129



Typical BHC Spectra





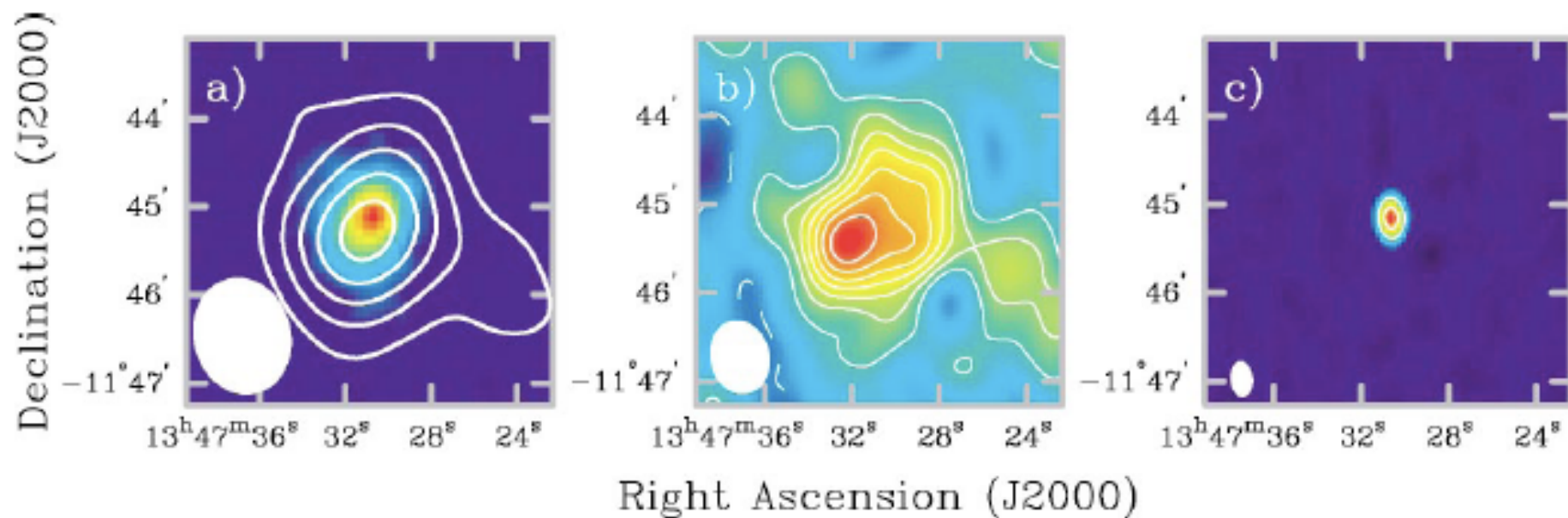


Figure 5 Interferometric images of the SZE of galaxy cluster RXJ 1347-1145, emphasizing different spatial scales. The Full Width Half Maximum (FWHM) ellipse of the synthesized beam is shown in the lower left corner of each panel. (a) Point source—subtracted SZE image (contours) overlaid on ROSAT X-ray image (false color). The contours are multiples of $185 \mu\text{K}$ ($\sim 2\sigma$), and negative contours are shown as solid lines. A 1500λ half-power radius Gaussian taper was applied to the u, v data, resulting in a $63'' \times 80''$ synthesized beam. The X-ray image is High Resolution Imager (HRI) raw counts smoothed with a Gaussian with $\sigma = 6''$ and contains roughly 4000 cluster counts. (b) Higher-resolution point source—subtracted SZE image (both contours and false color). A 3000λ half-power radius Gaussian taper was applied, resulting in a $40'' \times 50''$ synthesized beam. The contours are multiples of $175 \mu\text{K}$ ($\sim 1\sigma$). (c) Image of the point source made using projected baselines greater than 3000λ . This map has a synthesized beam of $15'' \times 24''$ and $\sigma \sim 275 \mu\text{Jy beam}^{-1}$, corresponding to a $\sim 1200 \mu\text{K}$ brightness sensitivity. The contours are multiples of 15σ . The data was taken with the BIMA mm-array operating at 28.5 GHz. Single-dish maps of the SZE toward RXJ 1347-1145 have also been made with the IRAM 30-m and the Nobeyama 45-m telescopes (Pointecouteau et al. 2001; Komatsu et al. 2001).