Cinemática relativística *et al.*

Carlos Alexandre Wuensche

Processos Radiativos I

Transformações de Lorentz e cinemática relativística

- Postulados da relatividade especial
  - As leis da natureza são as mesmas em dois sistemas de referência quaisquer, em movimento relativo uniforme, sem rotação
  - A velocidade da luz é uma constante, c, em qualquer sistema de referência

Consequências das transformações de Lorentz

- Introdução do conceito de espaço-tempo
- Tratamos de eventos, localizados no espaço e no tempo
  - Contração do espaço e dilatação do tempo
  - Transformação de velocidades
  - Efeito Doppler
  - Tempo próprio

Consequências das transformações de Lorentz

- Particularmente a transformação de velocidades e o tempo próprio terão aplicações importantes nos processos radiativos
  - O ângulo entre as direções paralela e perpendicular da velocidade, no caso relativístico (v ~ c) é inversamente proporcional a γ, de modo que θ ~ 1/γ, criando o chamado efeito de feixe (beaming)
  - Tempo próprio: invariante sob transformações de Lorentz e dado por $c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, num mesmo referencial. Em referenciais diferentes:

$$d\tau = dt(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

Quadrivetores

- Necessário para expressar eventos no espaço-tempo.
- Transformações de Lorentz ⇨ rotações no 4-espaço, logo exigem 4-vetores
- Norma deve ser invariante por rotação
- "Timelike", "Null", "Spacelike" se o produto dos quadrivetores for positivo, zero ou negativo, respectivamente.

$$A^i A_j \equiv \sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3$$

$$A^i B_j = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \equiv A^0 B^0 - \vec{A} \bullet \vec{B}$$

- Generalização das velocidades, acelerações, gradientes...

Quadrivetores

- Gradiente (escalar), divergente (vetor):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = (\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla\phi) \qquad \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = (\frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t}, \nabla\vec{A})$$

- Métrica de Minkowski:

$$\begin{aligned} & = & -1, \;\text{se}\; \mu = \nu = 0 \\ n_{\mu\nu} = n^{\mu\nu} & = & +1, \;\text{se}\; \mu = \nu = 1,2,3 \\ & = & 0, \;\text{se}\; \mu \neq \nu \end{aligned}$$

- Invariante em termos da métrica: $s^2 = n_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$

Covariância e contravariância

- Diferença aparente óbvia: sinal na componente temporal (- para co, + para contra)
- Representação Contravariante: índice superscrito
- Representação Covariante: invariante em forma, quando sob uma transformação do grupo de Lorentz (índice subscrito) - relações entre escalares de Lorentz, 4-vetores, 4-tensores

Covariância e contravariância

- A relação entre ambas pode ser escrita como:

$$x_\mu = n_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x^\mu = n^{\mu\nu} x_\nu$$

- E a métrica pode ser usada somente para subir e descer índices.

Mais significados...

- Co e contravariantes definem como coordenadas se comportam com uma mudança de base.
- Componentes co e contravariantes se relacionam através da métrica.
- Em coordenadas retilíneas, não há diferença entre um vetor co e contravariante. Entretanto, isso muda para outras coordenadas.
- Em espaços curvos ou em coordenadas curvas no espaço plano, (e.g. coordenadas cilíndricas no espaço Euclidiano), a quantidade dx^i é uma diferencial perfeita que pode ser diretamente integrada para obter x^i.

Mais significados

- As componentes covariantes da mesma diferencial dx_i em geral não são diferenciais perfeitas e a mudança integrada depende do caminho de integracão.
- Tensor covariante

$$A'_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^{\,i}} \frac{\partial x^m}{\partial x'^{\,j}} A_{lm}$$

- Tensor contravariante

$$A'^{\,ij} = \frac{\partial x'^{\,i}}{\partial x^l} \frac{\partial x'^{\,j}}{\partial x^m} A^{lm}$$

Análise tensorial

- Tensor de ordem 0: escalar
- Tensor de ordem 1: 4-vetor
- Tensor de ordem > 2: tensores (16 componentes)
- Algumas regras básicas:
  - Adição (linear)
  - Multiplicação (tensor resultante com rank = soma dos ranks dos tensores originais)
  - Ascensão e descenso de índices
  - Contração
  - Gradientes de campos tensoriais
- $$A^{\mu}_{,\nu} \equiv \text{Divergencia do vetor } A^{\mu}$$

Covariância dos fenômenos EM

- Equação de conservação da carga pode ser escrita como uma eq. tensorial:

$$\nabla \bullet \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \longrightarrow j^{\mu}_{,\mu} = 0$$

- Em que $j^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}$
- A eq. da onda para os potenciais fica

$$A^{\beta,\alpha}_{,\alpha} = -\frac{4\pi}{c} j^{\beta} \qquad A^{\mu} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

- E o calibre de Lorentz, $A^{\alpha}_{,\alpha} = 0$, vindo de

$$\nabla \bullet \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Ainda os tensores

- Campos elétrico e magnético podem ser representados, a partir dos potenciais, por um tensor anti-simétrico:

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

- Assim, as eqs. de Maxwell

$$\nabla \bullet \vec{E} = 4\pi\rho_e$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- viram $F_{\mu\nu}^{\ ,\nu} = \dfrac{4\pi}{c} j_\mu$

Tensores e eqs. de Maxwell

- As eqs. "internas" (sem fontes) ficam:

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\sigma\mu,\nu} + F_{\nu\sigma,\mu} = F_{[\mu\nu,\sigma]} = 0$$

- [] indicam a permutação dos índices.
- Uma consequência das eqs. de Maxwell é que os campos **E** ou **B**, sozinhos, não são invariantes. Se um campo é puramente elétrico num referencial (**B** = 0), em outro ele será uma mistura de **E** e **B**. Daí a denominação comum de ELETROMAGNÉTICO.
- Outros invariantes:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu,\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$$

$$detF = (\vec{E} \bullet \vec{B})^2 = (\vec{E}' \bullet \vec{B}')^2$$

Campos de uma carga em MU

- Uma carga em movimento, com velocidade constante ao longo do eixo x, terá uma descrição possível no seu próprio sistema de referência e outra, no sistema de referência do observador.
- A escolha do sistema definirá os campos que serão 'observados'
  - no sistema da partícula, o campo magnético será zero, uma vez que ela encontra-se em repouso
  - no sistema do observador, o movimento da carga dará origem a um campo magnético cujas componentes são perpendiculares à direção do movimento

Campos de uma carga em MU

- Uma carga em movimento, com velocidade constante ao … no seu pró… …ma de ref…

$$
\begin{aligned}
\vec{E}'_{par} &= \vec{E}_{par} \\
\vec{B}'_{par} &= \vec{B}_{par} \\
\vec{E}'_{per} &= \gamma(\vec{E}_{per} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \\
\vec{B}'_{par} &= \gamma(\vec{B}_{per} - \vec{\beta} \times \vec{E})
\end{aligned}
$$

- A e… …erão 'ob…
  - … zero,
  - … dará origem a um campo magnético cujas componentes são perpendiculares à direção do movimento

Campo de uma carga em MU

- As expressões para o campo elétrico, nesse caso, já apresentam as característica do potencial retardado (Lienard-Wiechert) naturalmente, quando usamos as transformações de Lorentz.

$$\vec{E} = q\left[\frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2}\right]$$

- Fisicamente.... para $\gamma \gg 1$, teremos $\beta \sim 1$ e uma equivalência entre campos elétricos e magnéticos no plano perpendicular ao movimento.
- Campos intensos somente quando $t \sim b/\gamma v$!

16

Campo de uma carga em MU

- As expressões para o campo elétrico, nesse caso, já apresentam as característica do potencial retardado (Lienard-Wiechert) naturalmente, quando usamos as tr

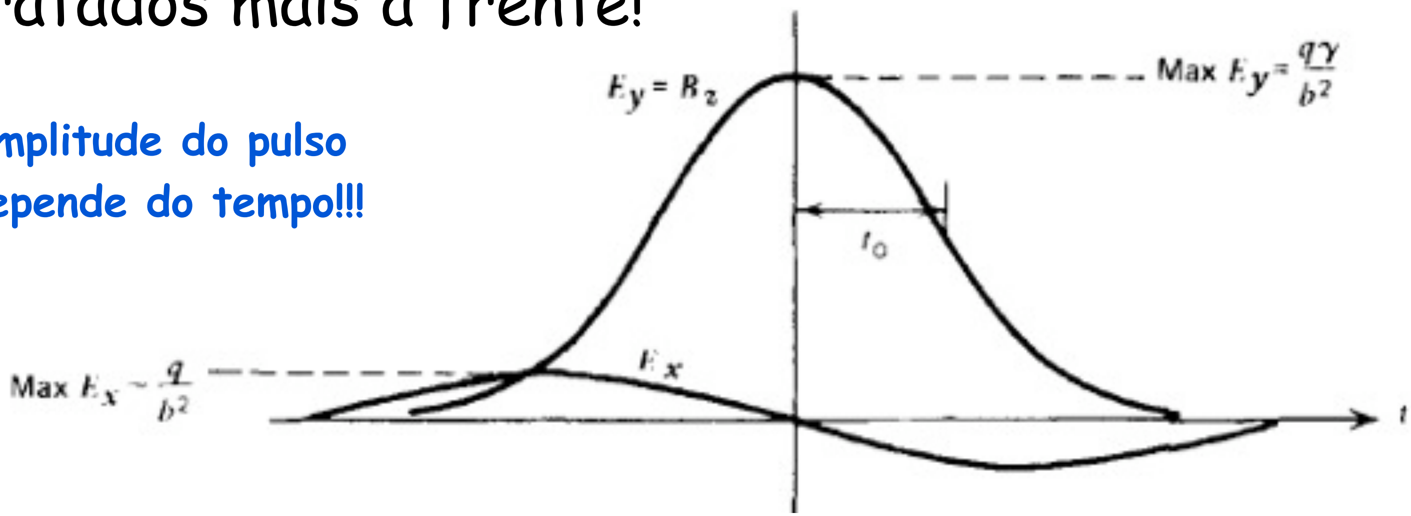
$$
\begin{aligned}
E_x &= -\frac{qv\gamma t}{(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} & B_x &= 0 \\
E_y &= \frac{q\gamma b}{(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} & B_y &= 0 \\
E_z &= 0 \qquad B_z = \beta E_y
\end{aligned}
$$

- Fis equivalência entre campos elétricos e magnéticos no plano perpendicular ao movimento.
- Campos intensos somente quando t ~ b/γv!

Campo de uma carga em MU

- Campo de uma carga extrema// relativística é visto como um pulso de radiação viajando na mesma direção da carga, mas confinado ao plano perpendicular ao movimento.
- Concentrado no plano transversal ao movimento (ângulo ~ 1/γ!!!)
- Crítico para os fenômenos de emissão que serão tratados mais à frente!

Amplitude do pulso depende do tempo!!!



17

Espectro de potência

$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int E_y(t)e^{i\omega t}dt$$

$$= \frac{q\gamma b}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{-3/2}e^{i\omega t}dt$$

$$\hat{E}(\omega) = \frac{q}{\pi b v}\frac{b\omega}{\gamma v}K_1(\frac{b\omega}{\gamma v})$$

$$\frac{dW}{dAdt} = c|\hat{E}(\omega)|^2 = \frac{q^2 c}{\pi^2 b^2 v^2}(\frac{b\omega}{\gamma v})^2 K_1^2(\frac{b\omega}{\gamma v})$$

- Corte para $\omega > \gamma v/b$
- ($E(t)$ é máximo em $q\gamma/b^2$ para $\Delta t \sim b/\gamma v$)

Mecânica relativística

- Eqs. de Maxwell já vêm na formulação de Lorentz!
- Formulação Lorentziana garante a invariância; isso não acontece na formulação Galileana.
- Necessidade de uma formulação que se reduza à Newtoniana para baixas velocidades, mas que seja invariante em condições relativísticas; forma TENSORIAL!
- Alguns detalhes:
  - 4-força e 4-velocidade são sempre $\perp$
  - 4-força, na formulação covariante (relativística) sempre terá uma dependência com a velocidade, que desaparece no limite Newtoniano.

Mecânica Relativística

$$
\begin{aligned}
P^\mu &\equiv m_0 U^\mu \\
a^\mu &\equiv \frac{dU^\mu}{d\tau} \\
\vec{a} \bullet \vec{U} &= 0 \\
F^\mu &= m_0 a^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} \\
\vec{F} \bullet \vec{U} &= m_0(\vec{a} \bullet \vec{U}) = 0
\end{aligned}
$$

Emissão relativística

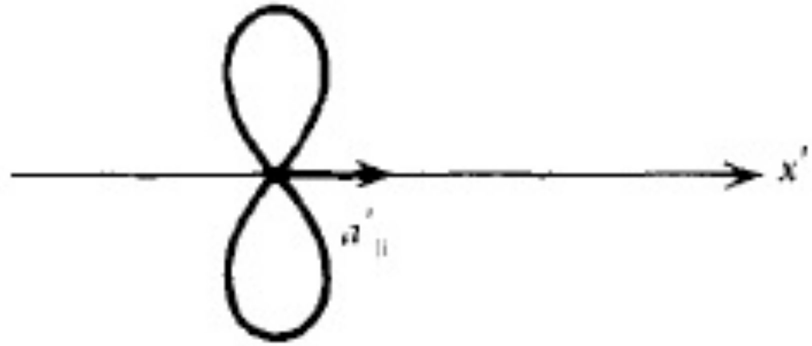
- Potência total emitida é um invariante de Lorentz para qualquer emissor que emita com simetria "frente-verso" em seu sistema de repouso instantâneo

$$P'=P \ (dW'/dt'=dW/dt)!$$

- A distribuição angular da potência emitida e recebida, no sistema de repouso da partícula, pode ser calculada de duas formas: uma, em função do intervalo de tempo percebido pela partícula (tempo durante o qual a emissão ocorre) e outra, em função do retardo devido ao movimento da partícula em relação ao observador.

21

- Normalmente usaremos o segundo caso, tanto devido à conveniência do sistema do observador quanto da facilidade de transformação devido às propriedades de simetria dos sistemas K e K' (muda somente o ' e o sinal de β).
- A dependência com a velocidade e a orientação $\parallel$ e $\perp$ cria uma assimetria na potência observada.
- Uma distribuição isotrópica no sistema de referência da partícula não é vista assim pelo observador, concentrando-se na direção e sentido do movimento para $\beta \rightarrow 1$.
- No caso ultrarelativístico, $\gamma >> 1$, a emissão de radiação estará concentrada em um cone estreito, de abertura angular $\theta \sim 1/\gamma$

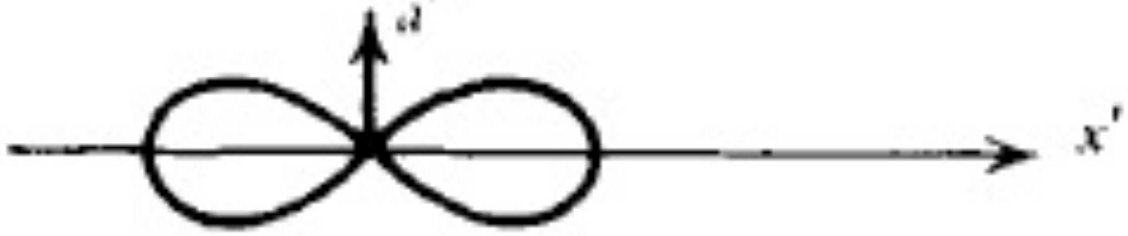


(a)

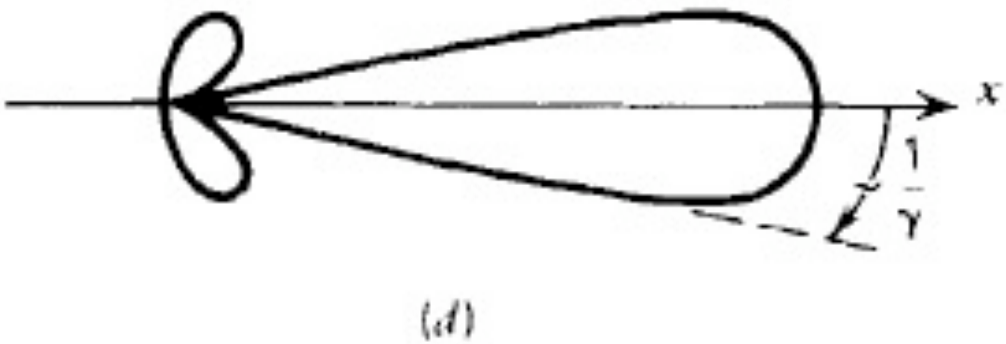
Dipole radiation pattern for particle at rest.

(b)

Velocidade e aceleração paralelas



Dipolo em repouso (orientações perpendiculares)



Velocidade e aceleração perpendiculares