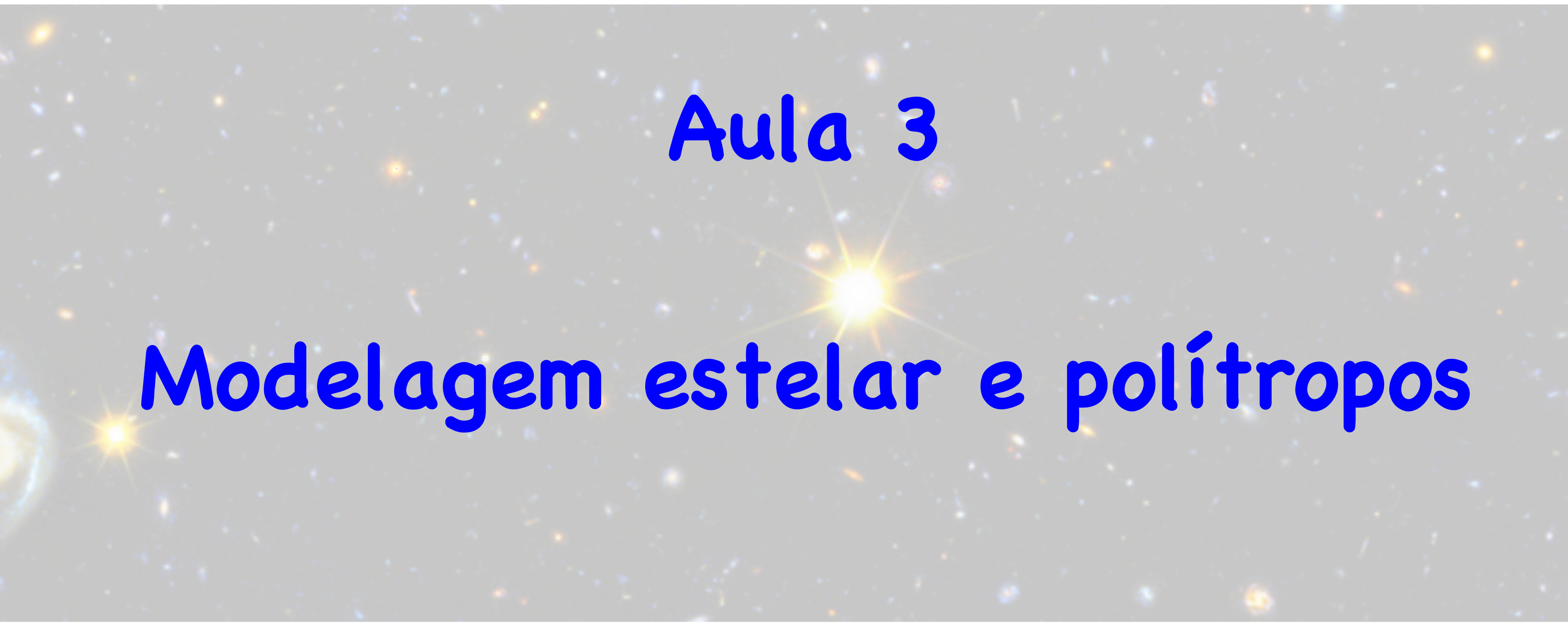
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

Evolução Estelar II
Ast-202-3



Aula 3

Modelagem estelar e polítropos

Carlos Alexandre Wuensche
INPE Divisão de Astrofísica
ca.wuensche@inpe.br

Credit: NASA, ESA, P. Oesch (University of Geneva), and M. Montes (University of New South Wales)

Leitura recomendada

- R. Kippenhahnn, A. Weigert, A. Weiss. *Stellar Structure and Evolution* (2nd ed.). Springer (2012)
  - ✓ Caps. 19 e 22
- C. Hansen; S. Kawaler. *Stellar interiors: Physical Principles, Structure and Evolution*. Springer (1994)
  - ✓ Cap. 2 – a referência ao programa ZAMS está ali.

Princípios básicos

- ☑ Para construir um modelo estelar é necessário conhecer:
  - ✓ Massa total, composição química, densidade

Variáveis primárias

  - ✓ Temperatura, pressão, densidade, luminosidade

Variáveis secundárias

- As relações cruzadas abaixo e suas derivadas são usadas na elaboração dos modelos numéricos

$$P = P(\rho, T, X)$$

$$E = E(\rho, T, X)$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T, X)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X)$$

- X é a composição química e, partir das grandezas P, E, κ e ρ, integramos as equações para gerar diferentes modelos.

☑ As equações da estrutura estelar podem ser escritas nas formas:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho$$
$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$
$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho\epsilon$$

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}$$
$$\frac{dr}{dM_r} = 1/4\pi r^2 \rho$$
$$\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon$$

- ☑ Mecanismo de transferência de energia

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi ac}\frac{P}{T^4}\frac{L}{GM(r)} \qquad \boxed{1}$$

- ☑ Transferência radiativa

$$\nabla = \nabla_{rad}, \text{ se } \nabla_{rad} \leq \nabla_{ad} \qquad \boxed{2}$$

- ☑ Convecção adiabática

$$\nabla < \nabla_{rad}, \text{ se } \nabla_{rad} > \nabla_{ad} \qquad \boxed{3}$$

- ☑ Sendo que

$$\nabla = \frac{d(ln\ T)}{d(ln\ P)} = -\frac{r^2 P}{GM(r)\rho}\frac{1}{T}\frac{dT}{dr} \qquad \boxed{4}$$

Critério de Ledoux

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} + \frac{\varphi}{\delta}\nabla_{\mu}$$

- Condições de contorno
  - Centro: $M_r = 0$, $r = L_r = 0$
  - Superfície: $M_r = M_{total}$, $\rho = P_r = 0$

- Em geral, embora diversos modelos numéricos possam ser calculados, somente um deles é considerado uma solução real.

Equações de estado politrópicas

- Solução clássica encontrada no trabalho de Chandrasekhar (1939).
- Definição formal: Modelos pseudo-estelares onde se supõe que valham relações semelhantes à eq. de estado $P = P(\rho^n)$
- Não são feitas suposições sobre transferência de energia ou eq. térmico.

- ☑ Ideia: remover a parte "energética" das equações, via eq. de estado $\rho = \rho(P)$.
- ☑ Nesse caso, tratamos as estrelas através das eqs. de equilíbrio hidrostático e de Poisson:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr}\rho \tag{5.1}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Phi}{dr}) = 4\pi G\rho \tag{5.2}$$

- ☑ Podemos deriver uma equação para P e p, integrando a eq. de transferência radiativa.
- ☑ Algumas manipulações algébricas levam à derivação da chamada relação politrópica: $P = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+1/n}$ $\boxed{6}$

- Podemos explorar casos conhecidos com a eq. politrópica:
  - Estrela totalmente convectiva:
    - ignoramos transporte radiativo, e temos $\nabla_{ad} = \frac{2}{5}$, logo, ao longo do raio da estrela, $T \sim P^{2/5}$ e, para uma eq. de estado com u constante: $T \sim P/\rho$, logo $P \sim \rho^{5/3}$
  - Esfera gasosa homogênea
    - $\rho = K_1 P^{1/\gamma}$, para $\gamma \to \infty, \rho = K_1 (constante)$

- Vantagens de usar relações politrópicas:
  - A eq. de estado assume uma forma simples, do tipo $P = K\,\rho^{\gamma}$ $\boxed{7}$
  - A eq. de estado contém, indiretamente, a temperature (no caso de um gás ideal) mas a relação adicional entre T e P (cond. adiabática) permite criar uma relação politrópica, com K sendo o parâmetro livre.
- Problemas...
  - Automaticamente a temperatura é estratificada, na forma de T = T(P).

- ☑ Partindo da condição de eq. hidrostático (5) e usando a relação politrópica, encontramos EDO que descreve adequadamente as condições de temperatura e pressão no interior estelar

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\gamma K \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \quad \boxed{8} \quad \longrightarrow \quad \rho = \left(\frac{-\Phi}{(n+1)K}\right)^n \quad \boxed{9}$$

- ☑ Substituindo (9) no lado direito da eq. de Poisson (5) obtemos uma EDO para Φ:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G\left(\frac{-\Phi}{(n+1)K}\right)^n \quad \boxed{10}$$

- ☑ que, com algumas parametrizações adequadas é transformada na eq. de Lane-Emden.

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right] = -\theta^n \quad \boxed{11}$$

- Com as seguintes substituições:

$$\xi = Ar, \quad A^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n}(-\Phi_c)^{(n-1)} = \frac{4\pi G}{(n+1)K} \qquad \boxed{12}$$

$$\theta = \frac{\Phi}{\Phi_c} = (\frac{\rho}{\rho_c})^{1/n} \qquad \boxed{13}$$

- Soluções de interesse devem ser finitas em ξ=0, e ter as condições de contorno $\xi(0)$=1 e $\frac{d\theta}{d\xi}$=0. Na superfície, $\theta(\xi) \rightarrow 0$.
- Modelos correspondentes às soluções da equação de Lane-Emden para um certo valor de *n* são conhecidos como polítropos de índice n. As soluções são as chamadas soluções de Lane-Emden.
- Soluções analíticas existem somente para n=0, 1, e 5.

- ☑ É possível usar os modelos politrópicos para descrever uma estrela com o núcleo composto de matéria degenerada relativística (n=3) e matéria ordinária não relativística (n=3/2)
- ☑ Chandrasekhar usou esses modelos para descrever estrelas não convencionais e fazer o primeiro modelo de uma anã branca. Um polítropo com n=3 teria a forma:

$$M = 4\pi\left(-\frac{\theta'}{\xi}\right)\xi^3\left(\frac{K}{\pi G}\right)^{3/2} \qquad \boxed{14}$$

- ☑ E, no caso de uma anã branca (com e^- degenerados...)

$$M_{Ch} = \frac{5{,}836}{\mu_e^2} M_\odot = 1{,}459\ M_\odot \qquad \boxed{14.1}$$

- ☑ Os casos discutidos anteriores partem da eq. de equilíbrio hidrostático e de Poisson e consideram um sistema em equilíbrio. Entretanto, é possível também modelar polítropos em colapso e aplicar os conceitos ao estudo de objetos compactos!
- ☑ No caso de considerarmos o termo de inércia na eq. (5.1), temos:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \qquad \boxed{15}$$

- ☑ Consideramos um polítropo relativístico, de matéria degenerada, com n=3 ou $\gamma = \gamma_{ad} = \frac{4}{3}$ ...

- Realizamos as substituições equivalentes a (12) e (13), com a(t) equivalente a 1/A na eq. (12). Nesse caso, ξ é independente do tempo, e a dependência fica contida em a(t).

- Introduzimos também um potencial ψ para a velocidade, tal que $v_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r}$, com a condição $\Psi = 0$ quando $\xi = 0$:

$$r = a(t)\xi, \quad v_r = \dot{a}\xi \qquad \Psi = \frac{1}{2}a\dot{a}z^2 \tag{16}$$

$$av_r = a\dot{a}\xi = a\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \tag{17}$$

- E a derivada total de Ψ no sistema de referência comóvel (do polítropo) é:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + v_r\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\dot{a}z)^2 \tag{18}$$

- Com as novas variáveis, reescrevemos a eq. de Poisson e a eq. de continuidade da seguinte forma:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi^2\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}) = 4\pi G\rho a^2 \qquad \boxed{19}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{a^2\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi^2\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}) \equiv \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a} = 0 \qquad \boxed{20}$$

- Após alguma álgebra, chegamos às soluções que envolvem a(t) e ξ:

"setor" temporal

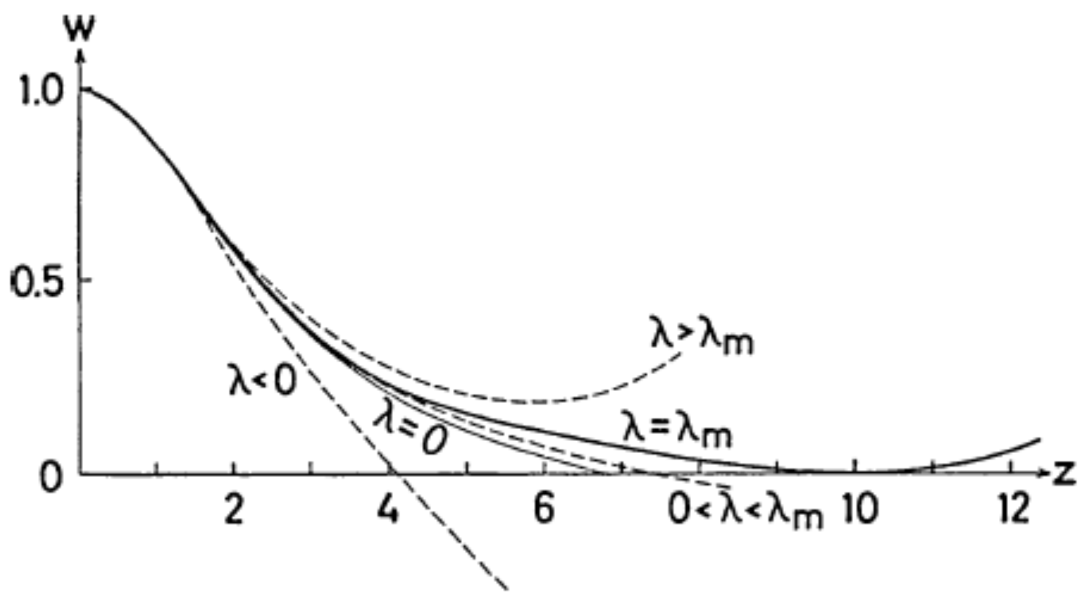
$$\frac{3}{4}\frac{(\pi G)^{1/2}}{K^{3/2}}a^2\ddot{a} = -\lambda \qquad \boxed{21}$$

$$6\frac{g(\xi)+w(\xi)}{\xi^2} = \lambda \qquad \boxed{22}$$

"setor" espacial

☑ λ é uma constante que permite soluções diferentes:

- ✓ $\lambda = 0$ – eq. de Lane-Emden clássica (eq. hidrostático)
- ✓ $\lambda \neq 0$ – situações fora do eq. hidrostático; o valor de λ mede o desvio
- ✓ Soluções finitas para $0 < \lambda \leq \lambda_m$, e para valores pequenos de λ (tipicamente $\lambda_m = 0{,}0065$).
- ✓ Para $\lambda > \lambda_m$, $\varrho(r)$ não tende a zero para valores finitos do raio...



Fonte: KWW (cap. 19)

- ☑ Interpretação do "colapso politrópico" (n=3):
  - ✓ Situação de equilíbrio independe do raio
  - ✓ Se P descresce ligeiramente (por um aumento de K, ver sol. na pág. 229 do KKW), a esfera de gás começa a contrair – processo descrito por (21) e (22)
  - ✓ λ é uma medida do desvio do E.H. causado pela redução de K

Soluções numéricas

- ☑ Métodos utilizados
  - ✓ Shooting (integrador Runge-Kutta): integração em camadas, da origem para a superfície.
  - ✓ Método de ajuste: integra simultaneamente de dentro para fora e vice-versa, e testa a convergência de ambas as soluções em algum ponto interno (em geral = R/2).
  - ✓ Método de Henvey (integrador Newton-Rapson.

O modelo de Eddington

- Um exemplo simples do uso de polítropos para fazer um "pseudo-modelo" estelar é o modelo de Eddington
- Ele incorpora, de maneira aproximada, a equação de transferência radiativa e a equação de energia.
- Partimos de uma situação não-convectiva, em que:

$$\nabla = \frac{d\ln T}{d\ln P} = \frac{3}{16\pi ac}\frac{P\kappa}{T^4}\frac{L_r}{GM_r} \qquad \boxed{24}$$

- ☑ Desenvolvendo essa equação para o gradiente estelar, vamos chegar na relação:

$$1-\beta(r)=\frac{L}{4\pi cGM}\langle\kappa\eta(r)\rangle \qquad \boxed{25}$$

em que κ é a opacidade do interior estelar e η é a relação entre as taxas de geração de energia L_r/M_r para diferentes raios.

- ☑ Utilizamos como opacidade:

$$\kappa=\kappa_e+\kappa_0\rho T^{-3,5} \qquad \boxed{26}$$

Opacidade eletrônica

- ☑ Opacidade κ cresce para o exterior se a densidade não decresce suficientemente rápido!
- ☑ $\eta(r)$ é proporcional à taxa de geração de energia e, na SP, ela tende rapidamente a 1, por causa do expoente positivo de ε.
- ☑ Solução simples se consideramos uma estrutura de camadas em que kl/m é constante ao longo do raio da estrela.
- ☑ Nesse caso, $\beta \approx$constante!

- Trabalhando com as expressões para a pressão de um gás perfeito e pressão de radiação,

$$P = \frac{\kappa}{\mu m_H}\rho T + \frac{a}{3}T^3 = \frac{\kappa}{\mu m_H \beta}\rho T, \quad \beta = \frac{P_{gas}}{P} \qquad \boxed{27}$$

- vamos chegar numa relação para equação de estado politrópica, da forma:

$$P = [\frac{3}{a}(\frac{\kappa}{\mu m_H})^4 \frac{1-\beta}{\beta^4}]^{1/3} \rho(r)^{4/3} \qquad \boxed{28}$$

- Em que definimos a "constante politrópica K" como:

$$K = [\frac{3}{a}(\frac{\kappa}{\mu m_H})^4 \frac{1-\beta}{\beta^4}]^{1/3} \qquad \boxed{29}$$

- A pressão de radiação, reescrita em termos de β, fica:

$$P_{rad} = \frac{1-\beta}{\beta}P_{gas} = \frac{1-\beta}{\beta}(\frac{\kappa}{\mu m_H})\rho T^4 = \frac{1}{3}aT^4 \qquad \boxed{30}$$

- Uma expressão útil para a temperatura pode ser derivada das equações (27) e (28):

$$T(r) = [\frac{3}{a}(\frac{1-\beta}{\beta})(\frac{\kappa}{\mu m_H})]^{1/3}\rho(r)^{1/3} \qquad \boxed{31}$$

- Podemos também estimar a massa para o modelo de Eddington sabendo que, para um polítropo com n=3, a massa total só depende do valor de K:

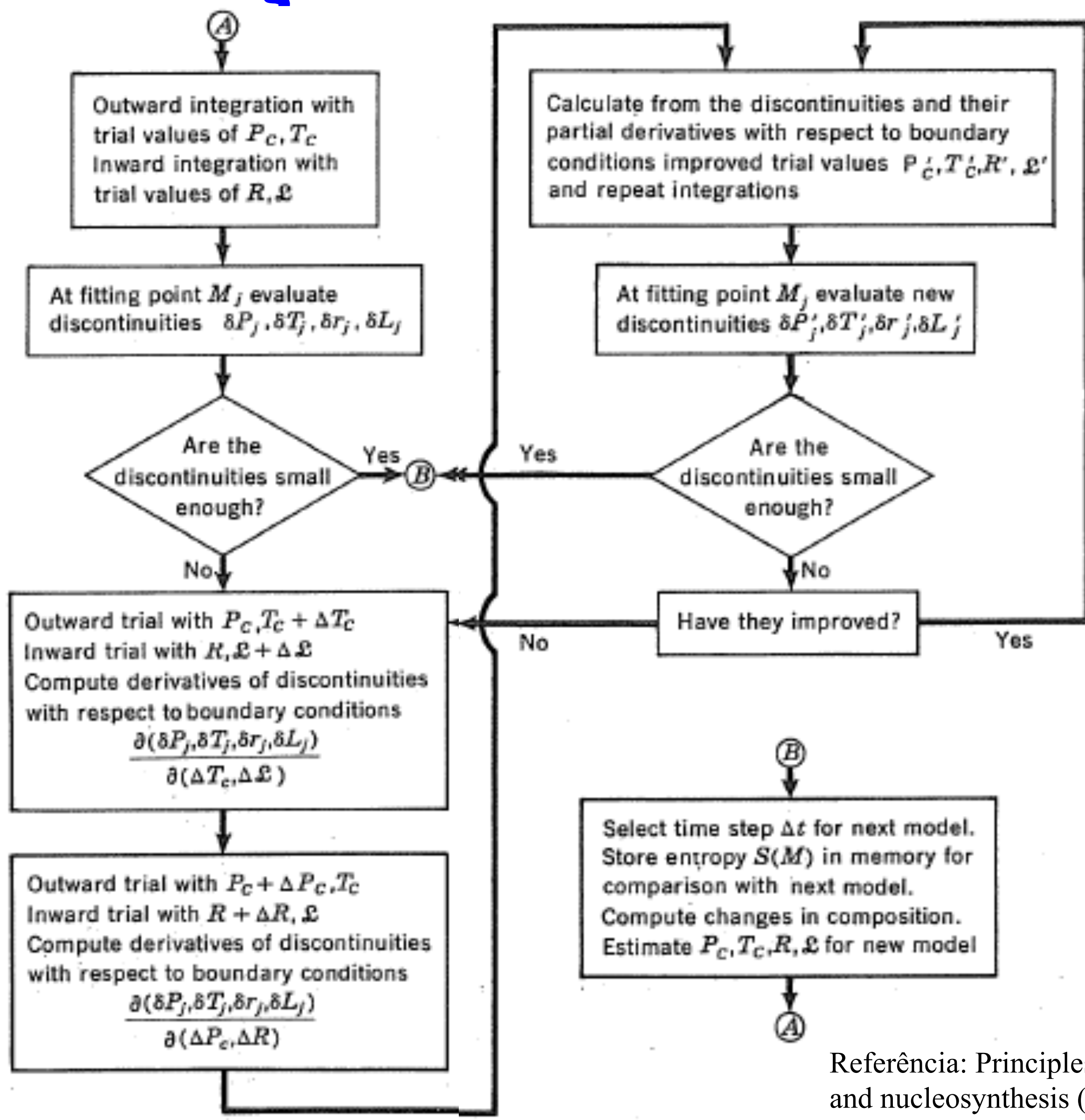
$$M = (\frac{K}{0,3639G})^{1/2} \rightarrow \frac{M}{M_\odot} = \frac{18.1}{\mu^2}\frac{(1-\beta)^{1/2}}{\beta^2} \qquad \boxed{32}$$

- ☑ De acordo com (32), a pressão do gás predomina quando a massa é muito pequena ($\beta \to 1$)
- ☑ Quando a massa é muito grande, a pressão de radiação domina ($\beta \to 0$)
- ☑ A contribuição das duas pressões é igual quando $\beta \to 1/2$, ou seja, ${}^{M}/_{M_\odot} = 51/\mu^2$
- ☑ Para $M/M_\odot = 1$ e μ~0.62 (valor solar), $\beta \approx 0{,}9995$, e podemos desprezar a pressão de radiação.
- ☑ Falhas no modelo:
  - ✓ Ele não fornece valores absolutos para as grandezas secundárias, uma vez que o raio e a massa são parametrizados.
  - ✓ Não se pode resolver o problema do modelo estelar sem atacar as equações de transporte de energia e calor.
  - ✓ Nesse sentido, o modelo é incompleto e só admite uma solução adequada se especificamos M e R.

A abordagem para modelos realistas!

- ☑ Modelos realistas ⇨ estrelas reais!
- ☑ Atacamos duas regiões:
  - ✓ Caroço central, mais denso.
  - ✓ Envelope rarefeito (convectivo ou radiativo).

Soluções numéricas



Referência: Principles of Stellar Evolution and nucleosynthesis (D.D. Clayton)

Expansão central

- Solução de singularidades nas equações da estrutura estelar quando R $\Rightarrow$ 0?
- É necessário que as soluções sejam regulares na origem.
- Expansão de r em séries, em torno do ponto r=0
- Transferência de energia: convecção e/ou radiação

Envelope radiativo

- Envelope?
  - Região tênue que envolve o núcleo degenerado das supergigantes vermelhas...
  - Camada finíssima não degenerada que envolve o núcleo totalmente degenerado de uma anã branca
- Para essa abordagem, envelope é a porção da estrela que começa na fotosfera, com massa desprezível, em eq. hidrostático e que não gera energia por reações nucleares ou contração gravitacional
  - Definição da fotosfera? Superfície estelar?
  - Região de pressão zero?

- A discussão do limite físico do envelope radiativo leva à luminosidade limite que mantém a estrela em equilíbrio: a luminosidade de Eddington.

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c G M}{\kappa} \qquad (33)$$

- Suposições sobre a estrutura em equilíbrio hidrostático e a opacidade:
- Valores típicos para o envelope radiativo em estrelas do tipo solar
  - ✓ κ = 0,34 cm^2/g
  - ✓ X = 0,7
  - ✓ T_{ef}=5780 K
  - ✓ ρ_{press}=10^{-6} - 10^{-7} g/cm^3

Estrelas totalmente convectivas

- Opacidade superficial dominada por H^- (hidrido)
- Equação politrópica $P = K\ T^{5/2}$
- Esse quadro representa uma fotosfera de onde escapa a radiação visível, seguida de uma tênue camada radiativa e, em seguida, a zona convectiva.
- Essa estrutura representa bastante bem as camadas externas do Sol.

- A relação de temperatura derivada da equação politrópica é dada por

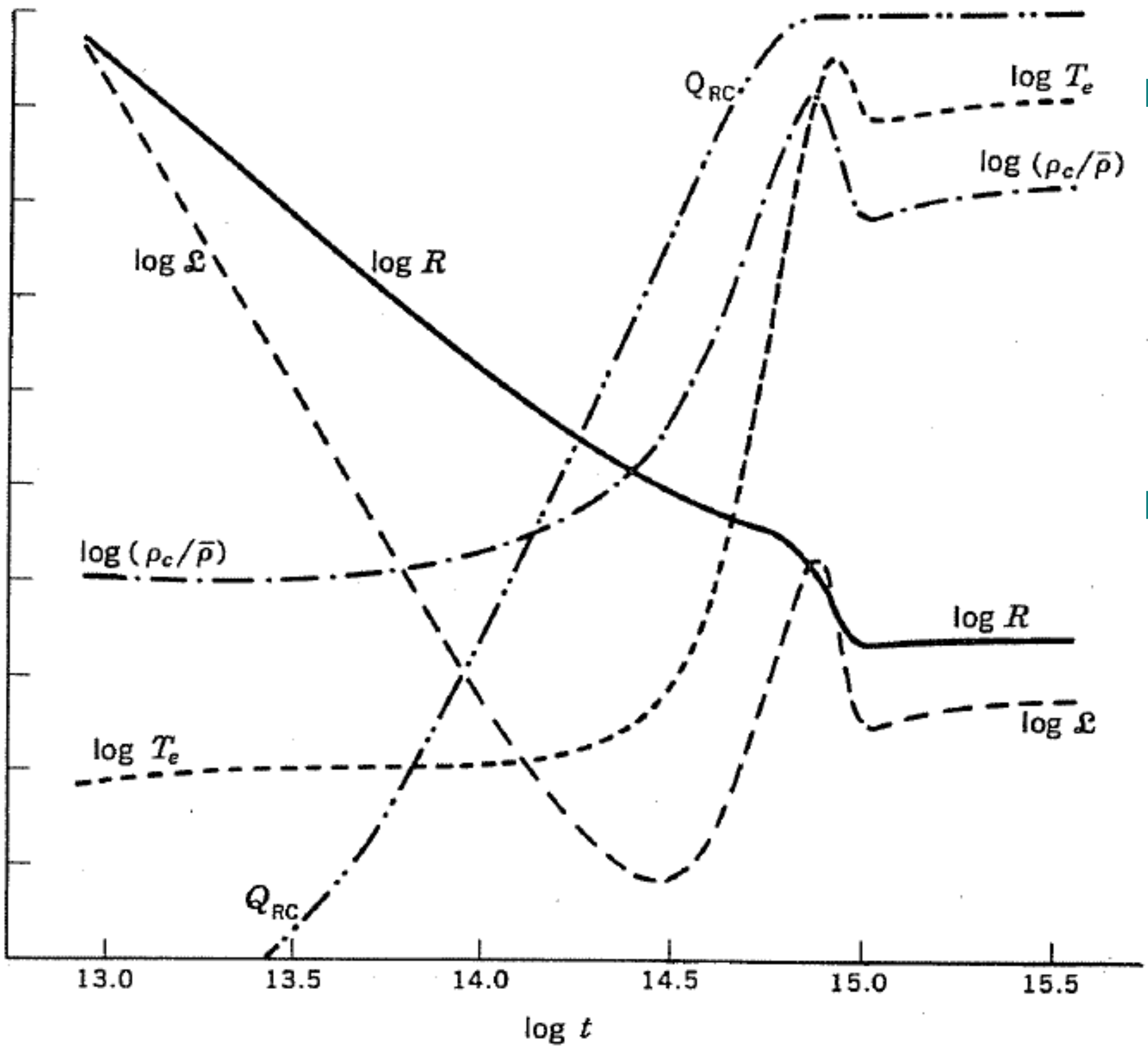
$$T_{eff} = 2600\mu^{13/51}[\frac{M}{M_\odot}]^{7/51}[\frac{L}{L_\odot}]^{1/102}K \qquad \boxed{34}$$

- Os expoentes estranhos refletem a dificuldade e a imprecisão dos cálculos para esses casos.

- ☑ Essa relação define o locus de temperatura constante para diversas luminosidades (para uma dada massa).
- ☑ A temperatura efetiva de estrelas completamente convectivas em equilíbrio hidrostático são essencialmente independentes do mecanismo inicial de geração de energia.

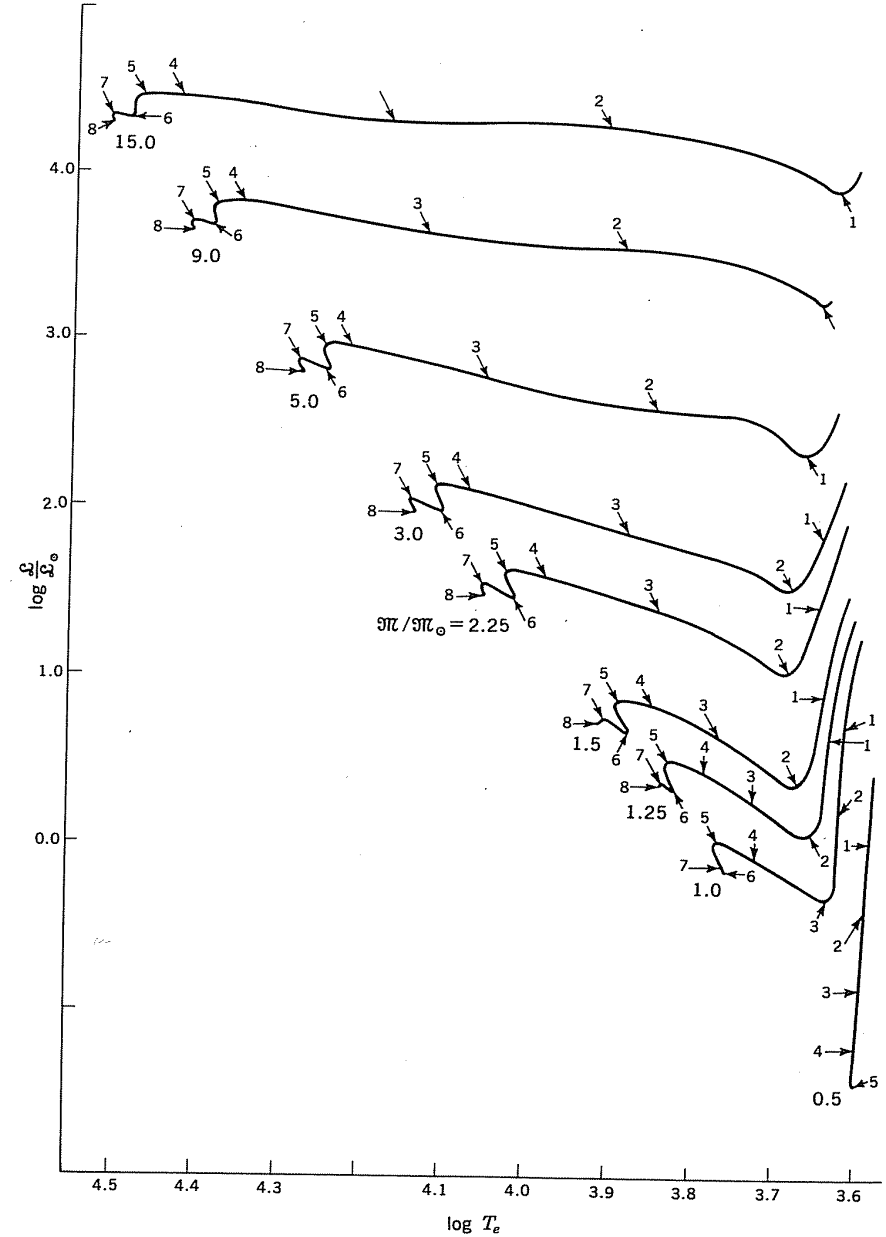
Resultados de modelos

- Leitura (recomendadíssima): "Principles of Stellar Evolution and Nucleossynthesis" (D. D. Clayton), caps. 2 (Eq. de Lane-Emden) e 6 (Modelagem estelar)



- ☑ Variação em função do tempo das grandezas secundárias durante a contração de uma estrela de uma massa solar para a sequência principal.
- ☑ Intervalos:
  - ✓ 3,58 < log T < 3,78
  - ✓ −0,4 < log (L/L_{sol}) < 0,6
  - ✓ −0,4 < log (R/R_{sol}) < 0,6
  - ✓ 0 < log(ρ_c/ρ) < 2,0
  - ✓ 0 < Q_{rc} 1

- ☑ Trajetórias da contração pré-SP para modelos com massas 0,5; 1; 1,25; 1,5; 2,25; 3; 5; 9 e 15 M_{sol}.
- ☑ Os tempos necessários para as estrelas atingirem os pontos numerados ao longo de suas trajetórias encontram-se na tabela a seguir.



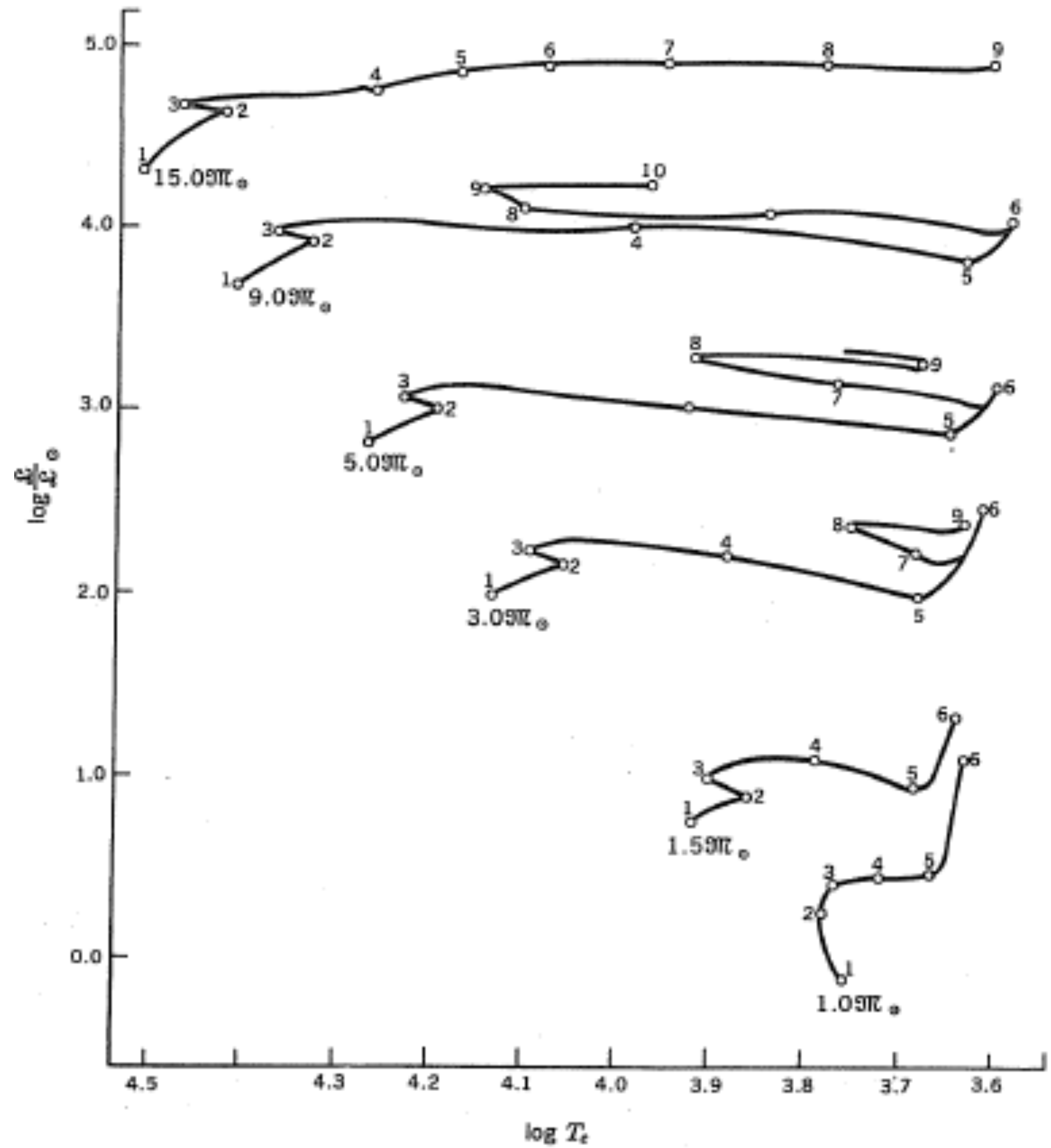
Tempos evolutivos (anos)

Table 6-1 Evolutionary lifetimes, years†

	$\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot$								
Point	15.0	9.0	5.0	3.0	2.25	1.5	1.25	1.0	0.5
1	6.740×10^2	1.443×10^3	2.936×10^4	3.420×10^4	7.862×10^4	2.347×10^5	4.508×10^5	1.189×10^5	3.195×10^5
2	3.766×10^3	1.473×10^4	1.069×10^5	2.078×10^5	5.940×10^5	2.363×10^6	3.957×10^6	1.058×10^6	1.786×10^6
3	9.350×10^3	3.645×10^4	2.001×10^5	7.633×10^5	1.883×10^6	5.801×10^6	8.800×10^6	8.910×10^6	8.711×10^6
4	2.203×10^4	6.987×10^4	2.860×10^5	1.135×10^6	2.505×10^6	7.584×10^6	1.155×10^7	1.821×10^7	3.092×10^7
5	2.657×10^4	7.922×10^4	3.137×10^5	1.250×10^6	2.818×10^6	8.620×10^6	1.404×10^7	2.529×10^7	1.550×10^8
6	3.984×10^4	1.019×10^5	3.880×10^5	1.465×10^6	3.319×10^6	1.043×10^7	1.755×10^7	3.418×10^7	
7	4.585×10^4	1.195×10^5	4.559×10^5	1.741×10^6	3.993×10^6	1.339×10^7	2.796×10^7	5.016×10^7	
8	6.170×10^4	1.505×10^5	5.759×10^5	2.514×10^6	5.855×10^6	1.821×10^7	2.954×10^7		

† I. Iben, Jr., *Astrophys. J.*, **141**:993 (1965). By permission of The University of Chicago Press. Copyright 1965 by The University of Chicago.

- ☑ Estrelas de pop I, com massas 1; 1,5; 3; 5; 9 e 15 M_{sol}. O ponto de partida é a SPIZ
- ☑ A idade das estrelas nos pontos numerados está na tabela a seguir.



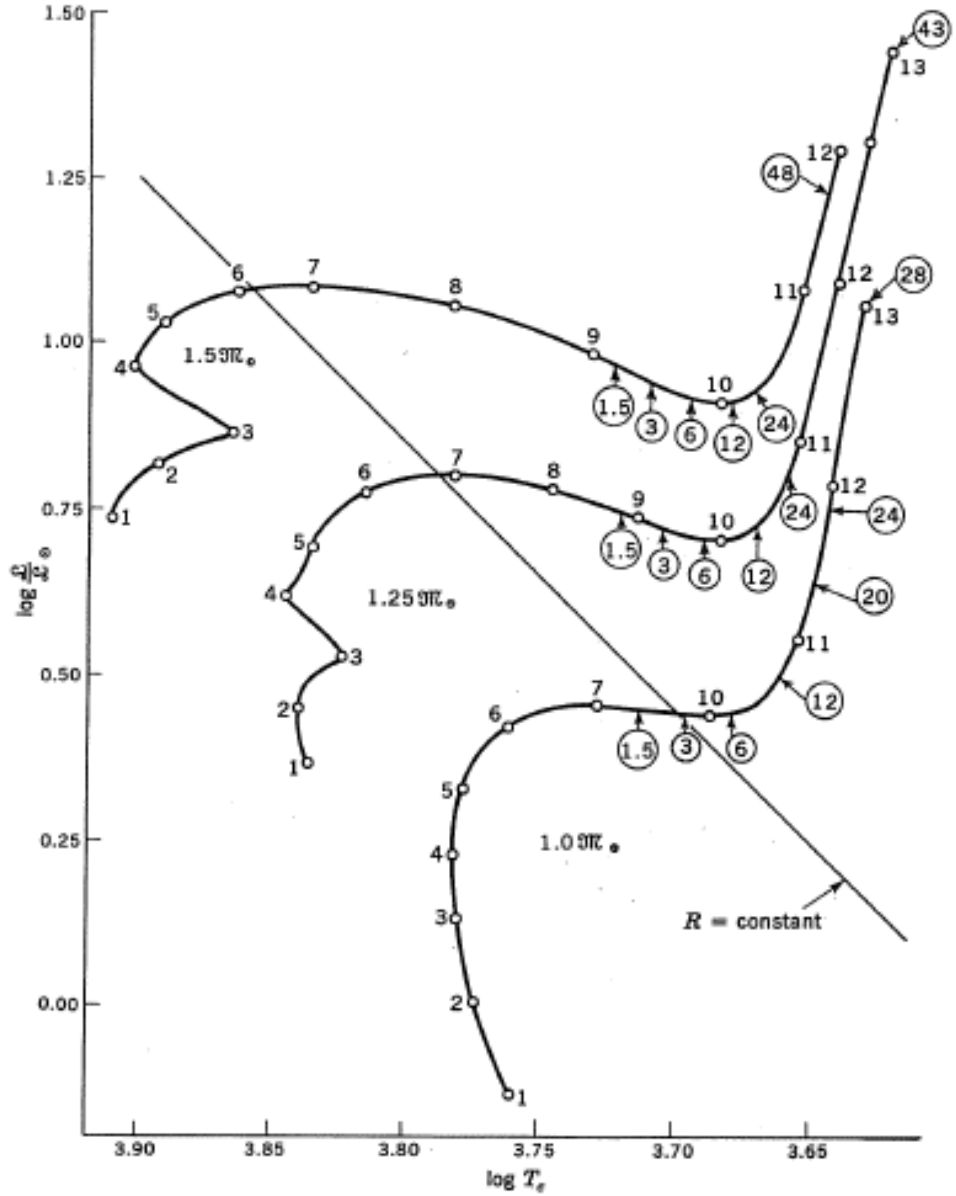
Tempos evolutivos (anos)

Table 6-8 Evolutionary lifetimes, years†

	$\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot$					
Point	15.0	9.0	5.0	3.0	1.5	1.0
1	6.160×10^4	1.511×10^5	5.760×10^5	2.510×10^6	1.821×10^7	5.016×10^7
2	1.023×10^7	2.129×10^7	6.549×10^7	2.273×10^8	1.567×10^9	8.060×10^9
3	1.048×10^7	2.190×10^7	6.823×10^7	2.394×10^8	1.652×10^9	9.705×10^9
4	1.050×10^7	2.208×10^7	7.019×10^7	2.478×10^8	2.036×10^9	1.0236×10^{10}
5	1.149×10^7	2.213×10^7	7.035×10^7	2.488×10^8	2.105×10^9	1.0446×10^{10}
6	1.196×10^7	2.214×10^7	7.084×10^7	2.531×10^8	2.263×10^9	1.0875×10^{10}
7	1.210×10^7	2.273×10^7	7.844×10^7	2.887×10^8		
8	1.213×10^7	2.315×10^7	8.524×10^7	3.095×10^8		
9	1.214×10^7	2.574×10^7	8.782×10^7	3.262×10^8		
10		2.623×10^7				

† I. Iben, Jr., *Astrophys. J.*, **140**:1631 (1964). By permission of The University of Chicago Press. Copyright 1964 by The University of Chicago.

- Trajetórias evolutivas de estrelas de baixa massa (pop I) com massas 1; 1,25 e 1,5 M_{sol}.
- As idades nos pontos numerados encontram-se na tabela a seguir.
- Os círculos numerados representam os fatores de depleção da abundância superficial de Li^7 causada pelo aprofundamento da camada convectiva externa.



Tempos evolutivos (10^9 anos)

Table 6.9 Evolutionary lifetimes (10^9 years)†

Point	$1.0\mathfrak{M}_\odot$	$1.25\mathfrak{M}_\odot$	$1.50\mathfrak{M}_\odot$
1	0.05060	0.02954	0.01821
2	3.8209	1.4220	1.0277
3	6.7100	2.8320	1.5710
4	8.1719	3.0144	1.6520
5	9.2012	3.5524	1.8261
6	9.9030	3.9213	1.9666
7	10.195	4.0597	2.0010
8		4.1204	2.0397
9		4.1593	2.0676
10	10.352	4.2060	2.1059
11	10.565	4.3427	2.1991
12	10.750	4.4505	2.2628
13	10.875	4.5349	

† I. Iben, Jr., *Astrophys. J.*, **147**:624 (1967). By permission of The University of Chicago Press. Copyright 1967 by The University of Chicago.

FIM DA AULA 3