

Bloco 5

Sinais: Ruído e transformada de Fourier

Atualizado: Apr 15, 2009

AST203 - CVR

5-1

Tópicos

- Transformada de Fourier na medida de sinais
- Flutuações da radiação eletromagnética
- Sinal e ruído

Vale a pena lembrar que o conteúdo dessas anotações não tem rigor matemático. Algumas das referências citadas possuem essa característica e devem ser consultadas.

AST203 - CVR

5-2

Transformadas de Fourier

Referências

- ◇ Léna (2a. ed.) – Cap. 4 e Apêndice A
- ◇ Gray – Observation and analysis of stellar photospheres – Cap. 2
- ◇ Weaver – Applications of Discrete and Continuous Fourier Analysis

AST203 - CVR

5-3

Números complexos

- Um número complexo, z , pode ser escrito usando coordenadas retangulares:
 - ◇ $z = x + i y$,
 - onde x e y são números reais
- Em coordenadas polares, temos:
 - ◇ $z = |z| e^{i\psi}$,
 - onde $|z|$ e ψ são novamente valores reais
- As relações entre as componentes são:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \psi = \frac{y}{x}$$

AST203 - CVR

5-4

Transformada de Fourier

- Vamos inicialmente definir a transformada de Fourier.
- Dada uma função $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, a sua transformada de Fourier é:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\omega t} dt$$

- Assim, podemos definir o par de Fourier por uma função e sua transformada

$$\tilde{f}(\omega) \Leftrightarrow f(t)$$

A transformada de Fourier decompõe uma função em em um espectro contínuo de freqüências. A cada freqüência é associada uma amplitude e uma fase.

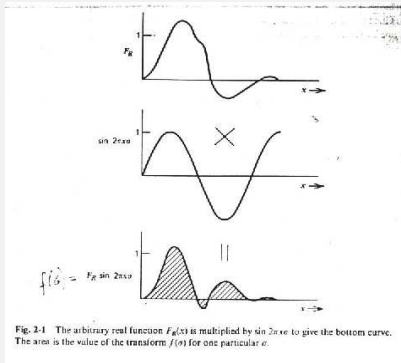
Lembrando que: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

temos que:

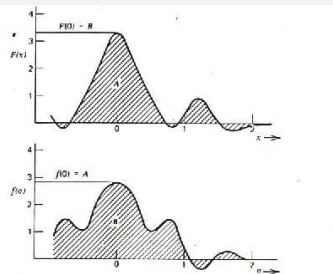
$$\tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(2\pi s x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(2\pi s x) dx$$

Se consideramos $f(x) = f_r(x) + i f_i(x)$, temos que:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) = & \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x) \cos(2\pi s x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) \sin(2\pi s x) dx \\ & + i \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) \cos(2\pi s x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x) \sin(2\pi s x) dx \end{aligned}$$



Gray



Gray

Exemplos de transformadas

↳ delta de Dirac, $\delta(t)$

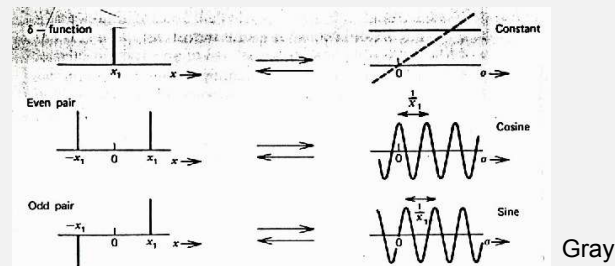
$$\int_{a-\xi}^{a+\xi} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$$

→ pulso instantâneo

$$\delta(x-a) \Leftrightarrow e^{-2\pi i s a}$$

→ transformada de Fourier

$$\delta(x) \Leftrightarrow 1$$



Gray

Exemplos de transformadas

◇ função caixa, $\Pi(t)$

- intervalo total da amostragem, T
- transformada de Fourier:

$$\Pi(t) \Leftrightarrow \tilde{\Pi}(\omega) = T \frac{\text{sen } \pi T \omega}{(\pi T \omega)}$$



Gray

◇ trem de deltas de Dirac = função de amostragem = função Shah, $\text{Ш}(x)$

$$\text{Ш}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \Delta x)$$

→ e a transformada??

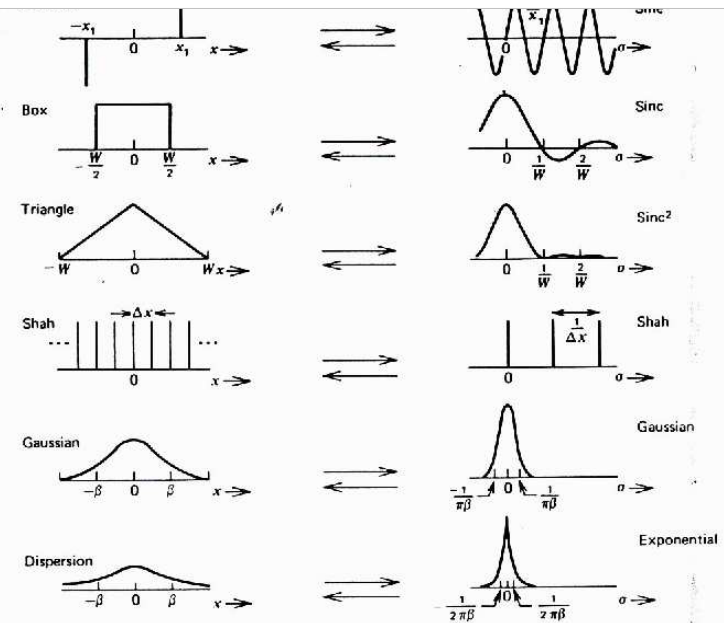
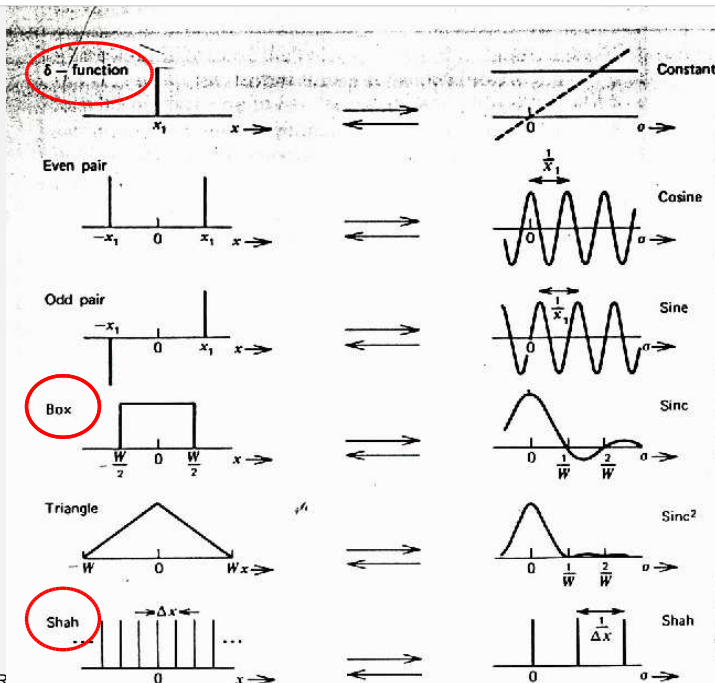


Fig. 2-6 Summary of the important functions and their transforms.

Definições

- A transformada de $f(t)$ é também chamada de espectro de $f(t)$
- Densidade espectral de potência ou espectro de potência, $S_f(\omega)$

$$S_f(\omega) = |\tilde{f}(\omega)|^2$$

↪ A densidade espectral de potência é uma quantidade real e positiva. A fase de uma dada componente em frequência é perdida.

- Espectro de amplitude

$$|\tilde{f}(\omega)| = \sqrt{\{\Re[\tilde{f}(\omega)]\}^2 + \{\Im[\tilde{f}(\omega)]\}^2}$$

- Espectro de fase

$$\arg \tilde{f}(\omega) = \arctan \frac{\Im[\tilde{f}(\omega)]}{\Re[\tilde{f}(\omega)]}$$

Potência de um sinal

- Considere um sinal complexo, por exemplo, um sinal elétrico representado por $f(t)$

↪ potência instantânea, $p(t)$

$$\rightarrow p(t) = f(t) f^*(t) = |f(t)|^2$$

↪ Potência média

$$P(t_o, T) = \frac{1}{T} \int_{t_o-T/2}^{t_o+T/2} |f(t)|^2 dt$$

↪ Energia = integral da potência instantânea

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Quantidades físicas e transformadas de Fourier

- Domínio de $f(t)$

↪ Rigorosamente falando, a transformada de uma função existe apenas se a função é definida em todo espaço real: $[-\infty, \infty]$

↪ Porém, quantidades físicas são conhecidas apenas em um domínio limitado: $[-T/2, T/2]$

→ onde T especifica o intervalo de t no qual as quantidades são conhecidas

↪ Portanto, para se obter a transformada de Fourier precisamos fazer alguma suposição a respeito da função fora do intervalo das medidas (periódicas, pulso, etc.)

↪ Uma suposição comum é considerá-la nula fora do intervalo onde ela é conhecida

Frequências negativas

- $f(t)$ deve ser definida em todo domínio real, tal qual sua transformada

- a parte negativa da transformada é definida pelas propriedades de $f(t)$

↪ se $f(t)$ é real, sua transformada é hermitiana (parte real é par e parte imaginária é ímpar)

→ nesse caso as propriedades de simetria e paridade definem a transformada no domínio de valores negativos

Convolução

- A convolução $h(x)$ de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é dada por:

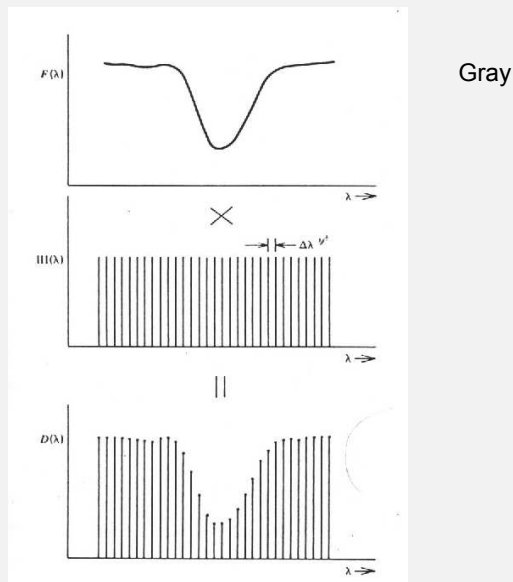
$$h(x) = f(x) * g(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u) du$$

$$\tilde{h}(s) = \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(s)$$

- Em muitas situações, pode-se descrever um sistema físico considerando $f(x)$ o sinal de entrada, $h(x)$ o sinal de saída e $g(x)$ a transformação que representa o sistema de aquisição
- Assim, em alguns casos pode ser mais simples estudar o sistema por suas transformadas de Fourier, já que no espaço de Fourier a convolução equivale a uma multiplicação

COMO REPRESENTAR MATEMATICAMENTE UMA MEDIDA?

Uma medida...



Gray

Medidas

- Amostragem $III(x)f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-n)$

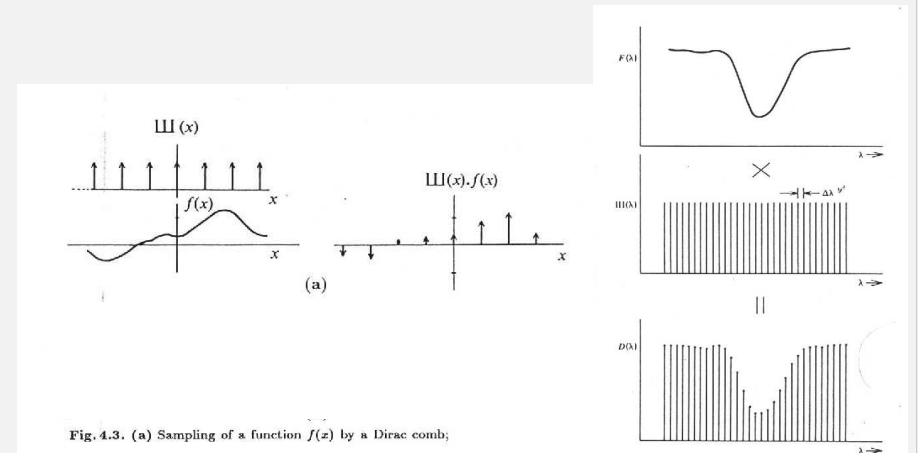


Fig. 4.3. (a) Sampling of a function $f(z)$ by a Dirac comb;

Gray

Medida

- Um medida $M(t)$ da grandeza $I(t)$ pode ser interpretada como:

$$M(t) = II(t) III(t) I(t)$$

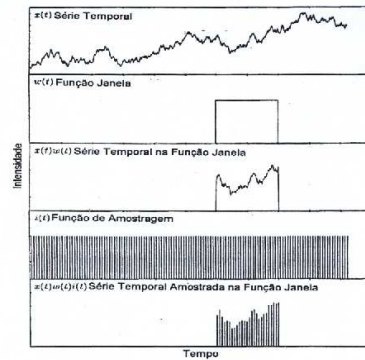


Fig. 2.1a- A obtenção de uma série temporal discreta x_i como uma seção amostrada discretamente de $x(t)$ envolve duas multiplicações.
 FONTE: M. Van der Klis, *Fourier Techniques In X-Ray Timing*, do livro *Timing Neutron Stars*, editado por H. Ogelman e E. P. J. Van den Heuvel NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, 1989.

Dissertação de Carlos Lohse
 Orient.: Francisco Jablonski

5-21

AST203 - CVR

Teorema da resolução

O intervalo finito de tempo de uma medida, ΔT , impõe um limite na resolução no espaço de Fourier, $\Delta \omega$, que é dado por:

$$\Delta \omega < \frac{1}{\Delta T}$$

AST203 - CVR

5-23

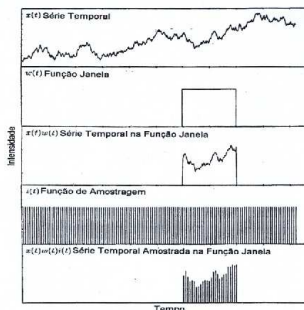


Fig. 2.1b- A Transformada de Fourier Discreta α_i de x_i é obtida da Transformada de Fourier contínua $\alpha(\nu)$ por uma dupla convolução. Linhas verticais tracejadas indicam a Frequência de Nyquist.
 FONTE: M. Van der Klis, *Fourier Techniques In X-Ray Timing*, do livro *Timing Neutron Stars*, editado por H. Ogelman e E. P. J. Van den Heuvel NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, 1989.

Dissertação de Carlos Lohse/Orient.: Francisco Jablonski

AST203 - CVR

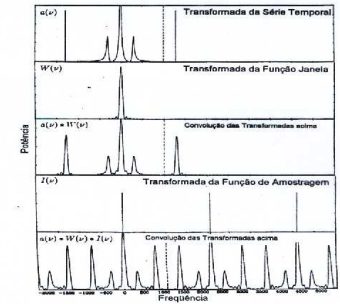


Fig. 2.1b- A Transformada de Fourier Discreta α_i de x_i é obtida da Transformada de Fourier contínua $\alpha(\nu)$ por uma dupla convolução. Linhas verticais tracejadas indicam a Frequência de Nyquist.
 FONTE: M. Van der Klis, *Fourier Techniques In X-Ray Timing*, do livro *Timing Neutron Stars*, editado por H. Ogelman e E. P. J. Van den Heuvel NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, 1989.

Teorema da resolução

- Vamos supor que possamos proceder a uma medida contínua no tempo. Ela possui necessariamente um início e um fim, de modo que o intervalo total de tempo da medida é ΔT . Chamando a medida de $O(t)$ e a grandeza que se mede de $I(t)$, podemos representar a medida como:

$$O(t) = \Pi(t) I(t)$$

- De modo que sua transformada de Fourier é dada por:

$$\tilde{O}(\omega) = \tilde{\Pi}(\omega) * \tilde{I}(\omega), \text{ onde}$$

$$\tilde{\Pi}(\omega) = \frac{\Delta T \text{sen}(\pi \omega \Delta T)}{\pi \omega \Delta T}$$

AST203 - CVR

5-24

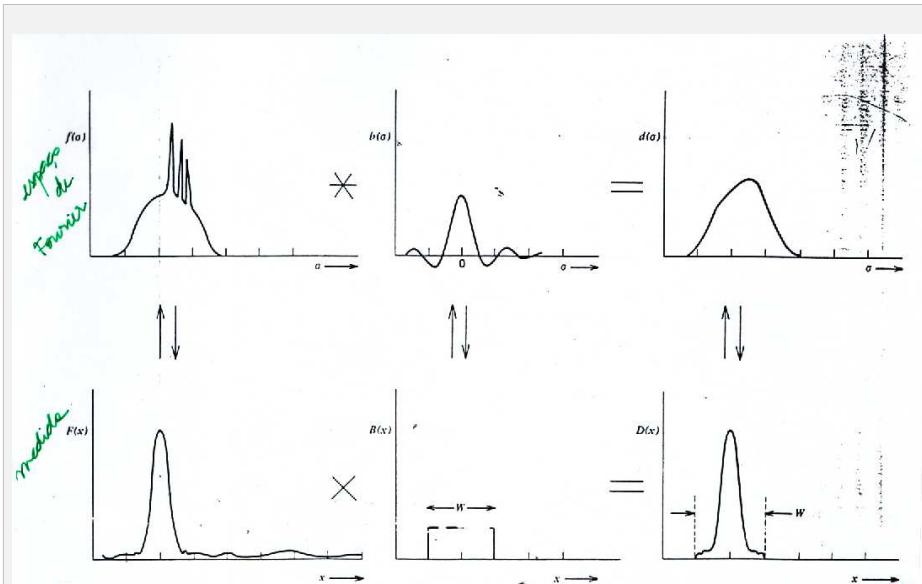
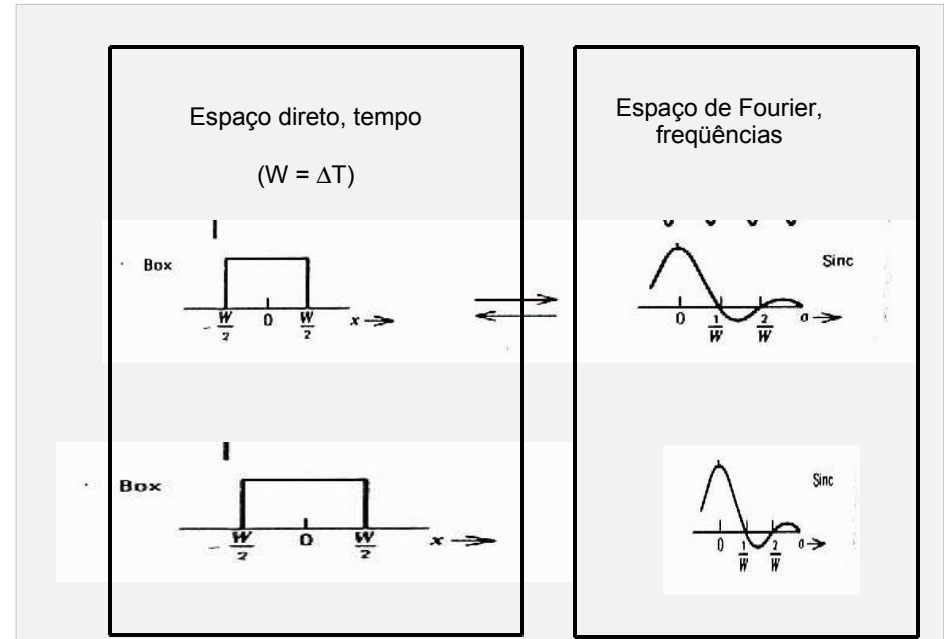


Fig. 2-10 The resolution theorem is illustrated for a finite observation of extent W . The data $D(x)$ is limited to the nonzero extent of $B(x)$. The data, $d(\sigma)$, in the transform domain is devoid of all sinusoids with frequency greater than $1/W$.



Amostragem e aliasing

- Uma medida pode ser expressa como:

$$M(t) = \Pi(t) \text{III}(t) I(t)$$

- e sua transformada é portanto:

$$\tilde{M}(\omega) = \tilde{\Pi}(\omega) * \tilde{\text{III}}(\omega) * \tilde{I}(\omega)$$

- Considerando Δt o intervalo de tempo entre medidas consecutivas, temos que no espaço de frequências os pontos da transformada distam de $1/\Delta t$.

- Definimos, então, a frequência de Nyquist: $\omega_n = \frac{0,5}{\Delta t}$

• Para não ocorrer aliasing:

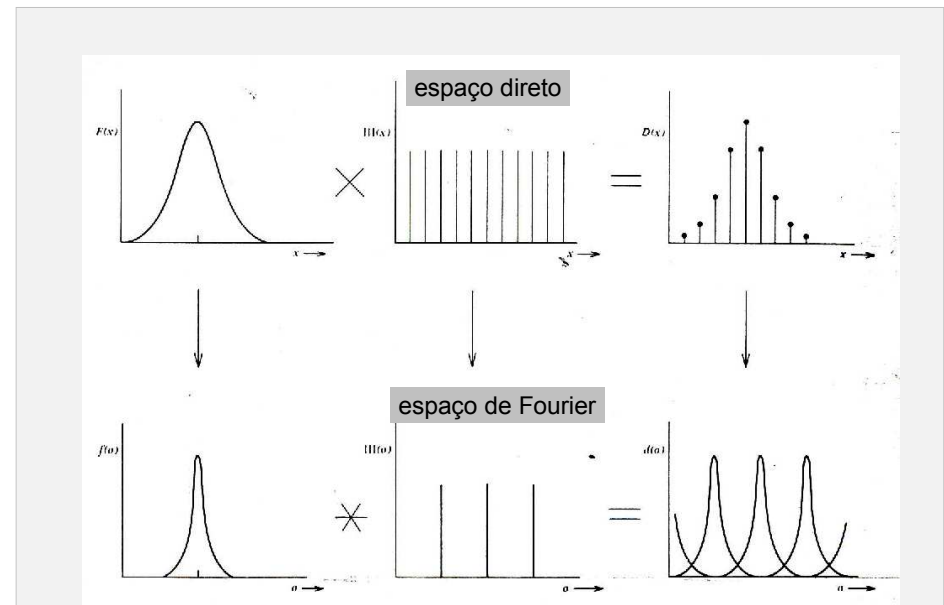
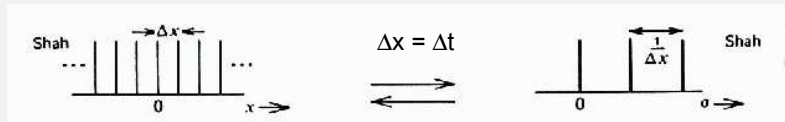
$$\omega < \omega_n$$


Fig. 2-11 Graphical illustration of the sampling of $F(x)$ and the multiplicity of $f(\sigma)$ it causes. The data transform, $d(\sigma)$, shows undesirable overlapping in the multiple structure (aliasing).

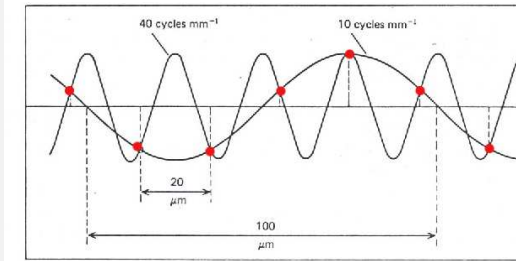
Aliasing



Gray

$$\omega_n = \frac{0,5}{\Delta t}$$

Fig. 4.5 An example of aliasing. Continuous sinusoids of 40 and 10 cycles mm^{-1} are sampled by a detector with individual sensing elements on $20 \mu\text{m}$ centres (50 mm^{-1}). $\omega_{\text{max}} = 25 \text{ cycles mm}^{-1}$ and $\omega = 10$ is confused with $2\omega_{\text{max}} - \omega = 40$.



Comentários

- função caixa
 - ◊ possui lobos importantes no espaço de freqüência
 - ◊ suavizar extremos para diminuir lobos
- usar dados subtraídos da média
 - ◊ remove pico em $\omega = 0$ lembre que $f(\omega) = \text{integral de } f(t)$
 - ◊ diminuição dos valor absoluto do sinal o que pode diminuir amplificação de efeitos indesejáveis na convolução

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

- É uma transformada de um série finita de sinais discretos – normalmente em função do tempo.
- Dada uma seqüência de N números (complexos)
 - ◊ X_0, X_1, \dots, X_{N-1}
- ela é transformada na seqüência
 - ◊ X_0, X_1, \dots, X_{N-1}
- através da DFT de acordo com a expressão

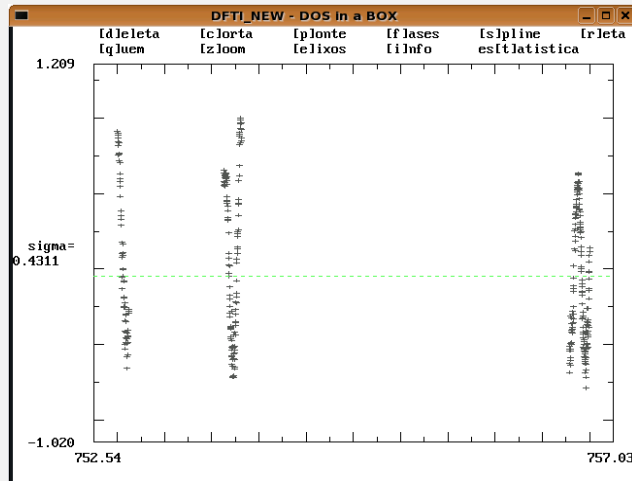
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

- sendo a inversa dada por

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \quad n=0, 1, \dots, N-1$$

Aplicação

- Uma aplicação da técnica é a procura de períodos em uma série temporal de fluxos ou magnitudes



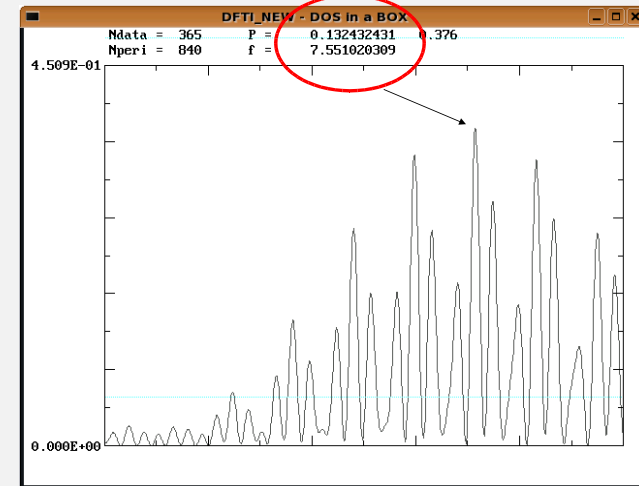
Curva de luz

Magnitude x HJD

AST203 - CVR

5-33

Periodograma – DFT (Implementação: Francisco Jablonski)



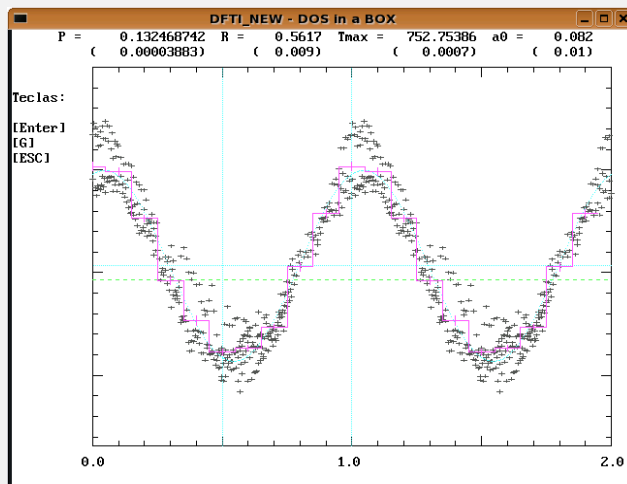
P = 0.7
f = 1.428

P = 0.1
f = 10.

AST203 - CVR

5-34

Diagrama em fase: HJD convertido para fase



AST203 - CVR

5-35

Sinais astronômicos e flutuações fundamentais

- Referências
 - ◊ Léna (ed. 1) – Cap. 4
 - ◊ Léna (ed. 2) – Cap. 6
 - ◊ Walker - Cap. 2

AST203 - CVR

5-36

Sinal e ruído

- O sinal medido, no caso geral, depende não só do sinal da fonte, mas também de uma componente devida a flutuações.
- Assim, o sinal medido $x(t)$ pode ser expresso como:
 - ◊ $x(t) = x_s(t) A(t) + n(t)$,
 - onde
 - $x_s(t)$ é o sinal da fonte (sinal de entrada)
 - $A(t)$ é um ruído multiplicativo
 - $n(t)$ é um ruído aditivo
- As flutuações podem ser:
 - ◊ intrínsecas, quando relacionadas à natureza da radiação
 - ◊ incidentes, se de origem instrumental ou do ambiente

Ruído de fundo

- Mesmo sem um sinal da fonte um detetor pode fornecer uma saída diferente de zero
- Exemplos
 - ◊ corrente de escuro (de um CCD)
 - ◊ no infravermelho a atmosfera, o telescópio e as componentes óticas não resfriadas emitem consideravelmente e compõem uma parte importante do sinal
 - ◊ céu: o fundo do céu (devido à atmosfera terrestre) não é completamente desprezível e comumente tem uma contribuição não-nula no sinal medido

Estes ruídos são aditivos ou multiplicativos?

Ruído do sinal

- O sinal tem um ruído intrínseco a sua natureza: ruído de fótons
- A atmosfera modifica a radiação de uma fonte fora da atmosfera de modo dependente do tempo
- Ruído do detetor
 - ◊ pode depender da temperatura e/ou de suas propriedades quânticas
 - ◊ o ruído do detetor pode em certas situações colocar-se como uma limitação prática a medida de um sinal

Razão sinal-ruído

- A razão sinal-ruído relaciona-se à incerteza do estimador de uma dada grandeza que se mede
- Vamos considerar, inicialmente, uma medida M composta pelo sinal da fonte, S , e um ruído de fundo, B . A medida pode ser representada como:

$$M = S + B$$

Nosso objetivo é determinar o sinal da fonte, isto é, S

- É comum podermos estimar a média e a variância do sinal medido, M , e do fundo, N . Assim:

$$\bar{S} = \bar{M} - \bar{B}$$

e

$$\sigma_S^2 = \sigma_M^2 + \sigma_B^2$$

- A razão sinal-ruído é dada pela razão entre o sinal e seu desvio padrão
 - ◊ É comumente abreviada como S/N

$$\frac{S}{N} = \frac{\bar{S}}{\sqrt{\sigma_s^2}}$$

- No nosso exemplo, a razão sinal-ruído, S/N, pode ser estimada como:

$$\frac{S}{N} = \frac{\bar{S}}{\sqrt{\sigma_s^2}} = \frac{\bar{M} - \bar{B}}{\sqrt{\sigma_M^2 + \sigma_B^2}}$$

A expressão para a razão sinal-ruído depende de como cada quantidade é estimada e da forma como o ruído modifica o sinal

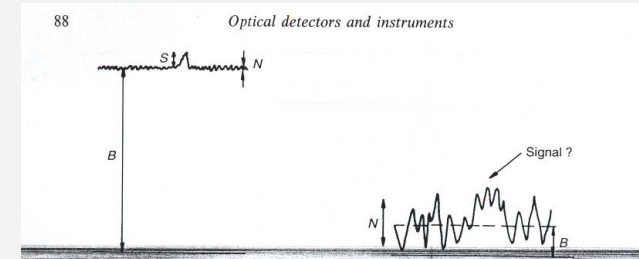


Fig. 3.27. Two extreme examples of noise. In the left-hand diagram, the signal is very weak compared to the background, but is easily detected because the signal-to-noise ratio is large: $S \ll B$ but $S/N \gg 1$. In the right-hand diagram, the signal is comparable in intensity to the background, but its very existence is in doubt because the signal-to-noise ratio is of order one: $S \approx B$ but $S/N \approx 1$.

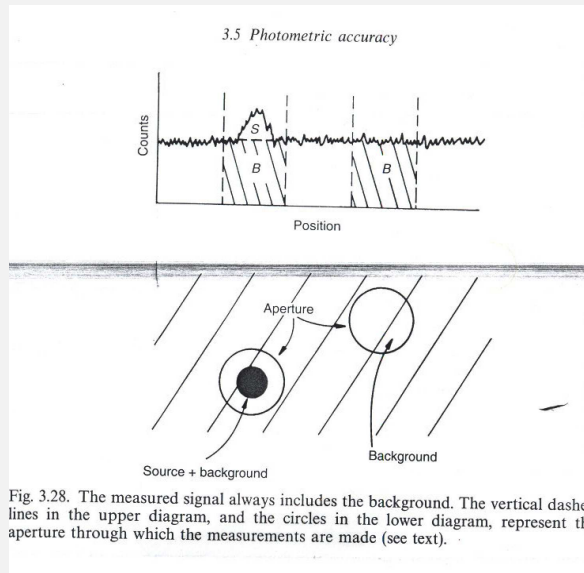


Fig. 3.28. The measured signal always includes the background. The vertical dashed lines in the upper diagram, and the circles in the lower diagram, represent the aperture through which the measurements are made (see text).

Exemplo de S/N para um CCD

- Fundo (*background*), B:
 - ◊ $B = N m q + D m$
 - N: número de fótons do céu por pixel
 - m: número de pixels
 - q: eficiência quântica do detector (será definida adiante)
 - D: ruído por pixel
- Medida, M:
 - ◊ $M = n q + B = n q + N m q + D m$
 - n: número total de fótons da fonte
- Sinal, S:
 - ◊ $S = M - B = n q$
- Erro do sinal, σ_s :
 - ◊ $\sigma_s \sim \sigma_M = \sqrt{M}$

Razão sinal/ruído

$$\frac{S}{N} = \frac{n q}{\sqrt{n q + N m q + D m}}$$

→ Considerando distribuição de Poisson

Exemplo de S/N para um detetor no IR

- Fundo (*background*), B:
 - ↳ $B = N m q + D m$
 - N: número de fótons por pixel
 - m: número de pixels
 - q: eficiência quântica do detetor (será definida adiante)
 - D: ruído por pixel
- Medida, M:
 - ↳ $M = n q + B = n q + N m q + D m$
 - n: número total de fótons da fonte
- Sinal, S:
 - ↳ $S = M - B = n q$
- Erro do sinal, σ_s :
 - ↳ $\sigma_s^2 \sim \sigma_M^2 + \sigma_B^2$

Razão sinal/ruído

$$\frac{S}{N} = \frac{n q}{\sqrt{n q + 2 [N m q + D m]}}$$

Limite de detecção

- Podemos afirmar que uma fonte foi detectada se ela possui uma $S/N > 3$.
- Algumas pessoas consideram valores inferiores, sendo o valor 3 uma abordagem conservadora (preferível)

Flutuações fundamentais

- As medidas associadas a uma onda eletromagnética (campo elétrico ou número de fótons, por exemplo) podem ser compreendidas como variáveis aleatórias.
- É possível estimar a variância associada a essas grandezas considerando:

↳ a potência da radiação de corpo negro dada por

$$P(\nu) = h \nu \left[\exp\left(\frac{h \nu}{k T}\right) - 1 \right]^{-1} \quad \text{em } W \text{ Hz}^{-1}$$

↳ e a variância da energia W de um sistema termodinâmico que pode ser expressa como

$$\langle \Delta W^2 \rangle = k T^2 \frac{d\langle W \rangle}{dT}$$

- Isso resulta em:

$$\sigma_{P(\nu)}^2 = k T^2 \frac{dP(\nu)}{dT} = P(\nu) h \nu \left\{ 1 + \left[\exp\left(\frac{h \nu}{k T}\right) - 1 \right]^{-1} \right\}$$

↖ Ruído quântico
↘ Ruído térmico

- Ruído quântico

↳ segue a distribuição de Poisson. Dada uma taxa média de fótons por unidade de tempo dada por n , temos que:

$$\langle N \rangle = n T$$

$$\sigma_N^2 = n T$$

$$\sigma_N = \sqrt{n T}$$

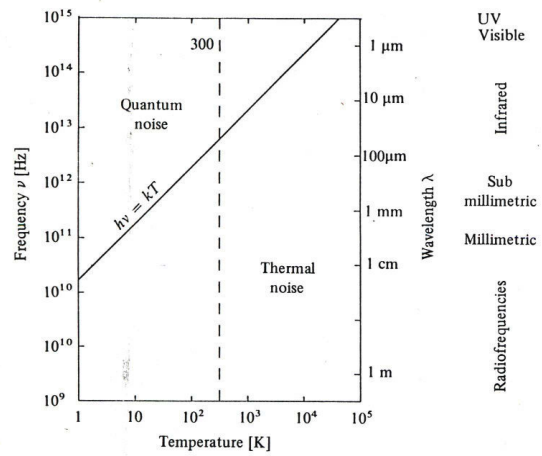


Fig. 4.22. Regions where thermal and quantum noise dominate. The straight line $h\nu = kT$ separates the two regions